В. В. Воробьёв.
Тренировочные варианты для подготовке к ЕГЭ по математике 2017 (базовый уровень) [для учащихся 10-11 классов]

Вариант 7

1. Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{12}\right):\frac{1}{36}$

Решение:

Выполним действие в скобках. В качестве общего знаменателя возьмем число 24 — наименьший общий делитель чисел 8 и 12.

$$\frac{1}{8}-\frac{7}{12}=\frac{1\cdot 3-7\cdot 2}{24}=\frac{3-14}{24}=-\frac{11}{24}$$

Выполним деление дробей.

$$-\frac{11}{24}:\frac{1}{36}=-\frac{11}{24}\cdot\frac{36}{1}$$

Сокращая числитель и знаменатель дроби на 12, окончательно получим:

$$-\frac{11}{2}\cdot\frac{3}{1}=-\frac{33}{2}=-16,5$$

***Ответ:* –16,5.**

2. Найдите значение выражения: $\frac{0,7\cdot 10^{-6}}{2,8\cdot 10^{-8}}$

Решение:

При решении примера используем свойства степеней $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$ и $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ и свойство дроби: *величина дроби не измениться, если её числитель и знаменатель умножить или разделить на любое число, отличное от нуля* (в нашем случае мы сначала умножаем числитель и знаменатель дроби на 10, а потом делим на 7).

$$\frac{0,7\cdot 10^{-6}}{2,8\cdot 10^{-8}}=\frac{0,7\cdot 10\cdot 10^{-6}}{2,8\cdot 10\cdot 10^{-8}}=\frac{7}{28}\cdot\left(10^{-6}\cdot 10^{8}\right)=\frac{1}{4}\cdot 10^{2}=0,25\cdot 100=25$$

***Ответ:* 25.**

3. В книжном магазине в августе продают пособия для подготовки к ЕГЭ со скидкой. Виктор в апреле заплатил за пособие 160 рублей, а Оля в августе за такое же пособие заплатила 152 рублей. Определите процент скидки.

Решение:

Составим пропорцию:

160 — 100%
152 — x%

из которой находим:

$$x=\frac{152\cdot 100}{160}=\frac{19\cdot 100}{20}=19\cdot 5=95\%$$

Т. о. скидка составляет 100% – 95% = 5%

***Ответ:* 5%.**

4. Найдите b из формулы $S_\Delta=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, если S_Δ = 10,8, a = 2,5, $\sin\alpha$ = 0,2.

Выразим из данной формулы b

$$b=\frac{2\cdot S_\Delta}{a\cdot\sin\alpha}$$

и после подстановки данных получим:

$$b = \frac{2 \cdot 10,8}{2,5 \cdot 0,2} = 43,2$$

Примечание:

Если почему-либо трудно выразить b непосредственно из формулы, то можно сразу подставлять данные числа в исходную в формулу:

$$10,8 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot b \cdot 0,2 \;\Rightarrow\; 10,8 = b \cdot 0,25 \;\Rightarrow\; b = 10,8 : 0.25 = 43,2$$

Ответ: **43,2.**

5. Найдите значение выражения $ctg\alpha + tg\alpha$, если $sin\alpha \cdot cos\alpha = -\frac{2}{5}$.

Решение:

Учитывая, что $tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$, а $ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$ сразу получаем:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Ответ: **–2,5.**

6. Подарочная открытка стоит 25 рублей. Какое наибольшее число таких открыток можно купить на 120 рублей?

Решение:

Для того, чтобы получить ответ достаточно выполнить деление с остатком числа 120 на число 25. Неполное частное от этого деления и есть наибольшее число открыток.

120 : 25 = 4 и 20 рублей в остатке.

Примечание:

Если мы купим 1 открытку, то потратим 25 рублей. За две открытки мы заплатим 2·25 = 50 рублей. За 3 открытки — 75 рублей, за 4 — 100. На покупку 5 открыток 120 рублей не хватит. Т. о . ответ — 4 открытки.

Ответ: **4.**

7. Даны уравнения и их корни. Установите соответствие между уравнениями и корнями, которые им соответствуют.

А) $\frac{x^2-49}{x-7}$ Б) $\sqrt{3-x} - 6 = 0$ В) $6^{x+9} = 1296$ Г) $\log_{0,5}(2x+52) = -2$

1) – 5 2) – 24 3) – 7 4) – 33

Решение:

А) Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда равен нулю её числитель. Кроме того, мы должны потребовать, что бы знаменатель дроби не был равен нулю (**на 0 делить нельзя!**). Т. е. $x - 7 \neq 0$ или $x \neq 7$.

Из $x^2 - 49 = 0$ следует $x = \pm 7$. Но, т. к. x не может равнятся 7, то получаем единственный ответ: $x = -7$. Итак: А) → 3)

Б) В этом примере мы должны потребовать, что бы получившийся ответ удовлетворял условию: $3 - x \geq 0$ или $x \leq 3$. Решаем уравнение: $\sqrt{3-x} = 6 \;\Rightarrow\; 3 - x = 36$ или $x = 35$. Т. к. ответ удовлетворяет ранее наложенному условию, то Б) → 4).

В) Уравнение показательное — $x \in \mathbb{R}$. Заметив, что 1236 = 6^4, сразу получаем:

$6^{x+9} = 6^4 \;\Rightarrow\; x + 9 = 4$ или $x = -5$. В) → 1).

Г) Уравнение логарифмическое. Поэтому, на выражение, стоящее под знаком логарифма, накладывается ограничение: $2x + 52 > 0$. Или $x > -26$. Перепишем данное уравнение в виде: $\log_{0,5}(2x+52) = -2 \cdot \log_{0,5} 0,5$. (Здесь используется свойство логарифма $\log_a a = 1$). Используя еще одно свойство логарифмов: $a \cdot \log_b c = \log_b c^a$ получим: $\log_{0,5}(2x+52) = \log_{0,5} 0,5^{-2} \;\Rightarrow\; (0,5^{-2} = 4) \;\Rightarrow\; \log_{0,5}(2x+52) = \log_{0,5} 4$.

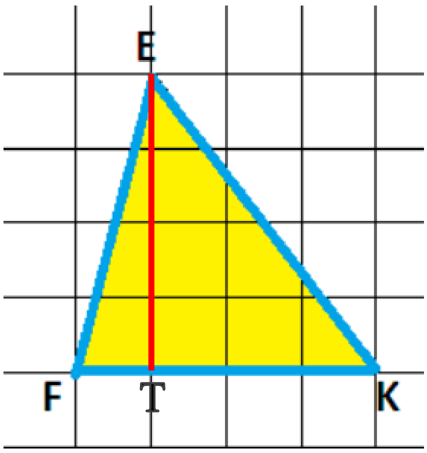
Т. к. основания логарифмов равны, то равны и выражения, стоящие под знаком логарифма: $2x + 52 = 4 \;\Rightarrow\; x = -24$. Г) → 2

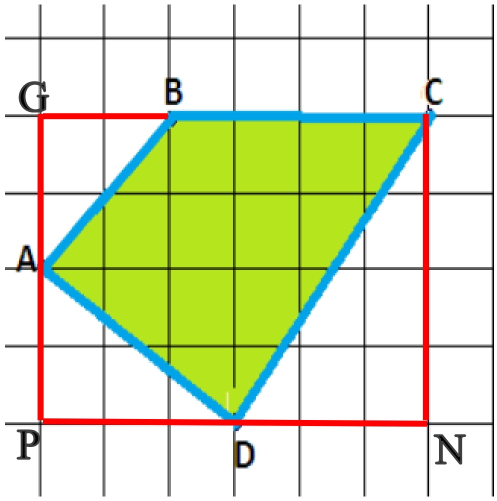
Ответ: **3412.**

8. Два земельных участка разбиты на клетки 35м × 35м. На сколько м^2 площадь первого земельного участка **FEK** меньше площади второго **ABCD**?

Решение:

Первый земельный участок **FEK** представляет собой треугольник. Его основание **FK** и высота **ET** (см. рис. 1) равны 4 клеткам или 4 × 35 = 140 метрам. Следовательно, его площадь равна $\mathbf{S_{FTK}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{FK} \cdot \mathbf{ET} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{140} \cdot \mathbf{140} = \mathbf{9800}$ м^2.





Достроим данную фигуру **ABCD** до прямоугольника **PGCN**. Тогда площадь земельного участка **ABCD** равна площади полученного прямоугольника минус площади прямоугольных треугольников **AGB**, **APD** и **DNC**. Получаем:

$$S_{ABCD} = S_{\mathrm{PGCN}} - S_{\mathrm{AGB}} - S_{\mathrm{APD}} - S_{DNC} = 35 \cdot 35 \cdot \left[6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4)\right] =$$

$$= 1225 \cdot \left[24 - \frac{1}{2} \cdot 22\right] = 1225 \cdot 13 = 15925 \text{ м}^2.$$

Окончательно получаем: $S_{ABCD} - \mathbf{S_{FTK}} = \mathbf{15925 - 9800 = 6125}$ м^2.

Ответ: **6125.**

9. В таблице даны условия банковского вклада в двух различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 40000 р. на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)
Банк А	40 руб. в мес.	8,7
Банк Б	Бесплатно	7,8

Решение:

Для определения суммы вклада на конец года в каждом из банков составим две пропорции:

Банк А						**Банк Б**				
40000	**руб**	—	**100**	**%**	и	**40000**	**руб**	—	**100**	**%**
x	**руб**	—	**108,7**	**%**		***x***	**руб**	—	**107,8**	**%**

Из которых находим:

$$x = \frac{40000 \cdot 108{,}7}{100} = \mathbf{43480} \text{ руб} \qquad \text{и} \qquad x = \frac{40000 \cdot 107{,}8}{100} = \mathbf{43120} \text{ руб}$$

Но, в Банке А еще вычтут 40 × 12 = 480 руб. Т. о. в этом банке клиент окончательно получит на руки 43000 рублей. Значит, в Банке Б вклад окажется наибольшим.

Ответ: **43120.**

10. У ученика Пети в тетради по геометрии всего 24 страницы, на шести станицах записаны формулы и основные свойства. Какая вероятность того, что Петя наугад откроет страницу, на которой имеется справочный материал?

Дано: Всего — ***n*** **=** 24 стр.; ***m*** **=** 6 стр. — со справочным материалом. **P(A)** =

Решение:

Пусть событие A — открыта страница со справочным материалом.

Всего существует 24 равновероятных исхода выбора одной произвольной страницы из 24. Событию A удовлетворяют 6 исходов. Следовательно, вероятность того, что событие A произойдет:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{24} = 0,25}$$

Ответ: **0,25.**

11. На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций на нефть в течение десяти дней февраля. Четвѐртого февраля бизнесмен купил 24 акции, а 8 февраля продал все акции. Какую прибыль в рублях получил бизнесмен в результате этой операции, если на оси ординат показана стоимость акций в рублях?

Решение:

Решение задачи понятно из рисунка. 4-го февраля каждая акция стоила 700 рублей, а 8-го — 1000 рублей. Значит прибыль составит: 24 × (1000 – 700) = 7200 руб.

Ответ: **7200.**

12. Даны выражения и их значения. Установите соответствие между выражениями и значениями, которые им соответствуют.

А) $\boldsymbol{8^{\log_8 3} - 5}$ Б) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{343}}{5\sqrt{28}}}$ В) $\boldsymbol{16^{-\frac{1}{4}}}$ Г) $\boldsymbol{\cos\frac{11\pi}{6}}$

1) 0,5 2) –2 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) 0,7

Решение:

А) Учитывая основное свойство логарифма $\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$ сразу получаем: $\boldsymbol{8^{\log_8 3} - 5 = 3 - 5 = -2}$. Итак: А) → 2).

Б) Заметив, что 343 = 7 × 49, а 28 = 7 × 4 получаем: $\boldsymbol{\frac{\sqrt{343}}{5\sqrt{28}} = \frac{7\sqrt{7}}{5\cdot 2\sqrt{7}} = \frac{7}{10} = 0,7}$. Б) → 4).

В) Используем следующие два правила действий со тепенями: $\boldsymbol{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$ и $\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$.

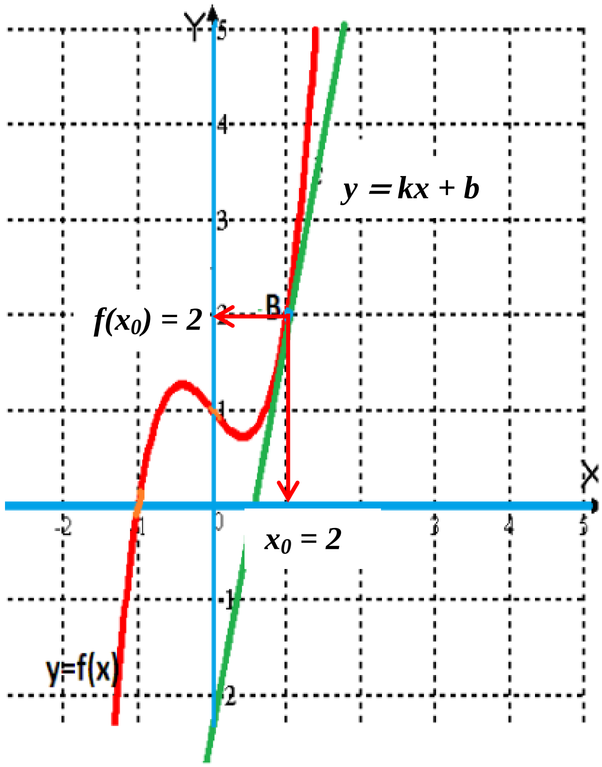
$\boldsymbol{16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2} = 0,5}$. В) → 1).

Г) $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$; Учитывая, что $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ получаем: $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Г) → 3). ***Примечание:*** В задании опечатка.

Ответ: **2413.**

13. Прямая $y = kx + l$ касается графика функции $f\ (x)$ в точке **B**(1;2). Найдите значение l, если

$f'(1) = 4{,}5$.



Решение:

Уравнение касательной имеет вид:

$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$.

В нашем случае $x_0 = 1$, $f\ (x_0) = 2$ (см. график) и координаты точки **B**. $f'(x_0) = f'(1) = 4{,}5$ — по условию. Получим:

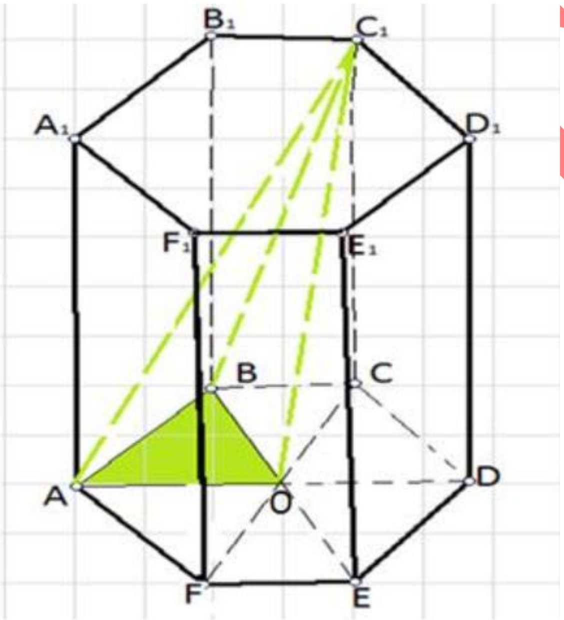
$y = 4{,}5\cdot(x-1) + 2$ или

$y = 4{,}5x - 4{,}5 + 2 = 4{,}5x - 2{,}5$

Отсюда следует, что $l = 2{,}5$.

Ответ: **2,5.**

Примечание: В ответе опечатка.



14. Объём правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равен 81. Найдите объём пирамиды C_1AOB (см. рис.).

Решение:

Объём призмы равен $V = S_{осн}H$ (1)

Объём пирамиды находим по формуле:

$$\tilde{V} = \frac{1}{3}\tilde{S}_{осн}h \qquad (2)$$

или $\tilde{S}_{осн}h = 3\cdot\tilde{V}$

$\tilde{S}_{осн} = S_{осн}/6$, а высота пирамиды равна высоте призмы: $h = H = CC_1$.

Перепишем формулу (1) в виде:

$$V = 6\tilde{S}_{осн}h = 6\cdot 3\cdot\tilde{V} \Rightarrow \tilde{V} = \frac{V}{18} = \frac{81}{18} = 4{,}5.$$

Ответ: **4,5.**

15. Самой быстрой птицей на свете является сокол Сапсан, который в пикирующем полѐте может развить скорость 322км/ч. Птица Черный стриж развивает скорость больше чем $1{,}56\times10^2$ км/ч, а птица Сероголовый альбатрос, известная своими высокими скоростными характеристиками, может развить скорость больше чем $0{,}147\times10^3$ км/ч. Учитывая некоторые выше указанные данные, установите соответствие между величинами и их возможными значениями.

ВЕЛЕЧИНЫ	**ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ**
А) скорость Черного стрижа	1) 150км/ч
Б) скорость сверхзвукого самолѐта Ту-244	2) 36км/ч
В) скорость бабочки Капустницы	3) 160км/ч

Г) скорость Сероголового альбатроса 4) 2340км/ч

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер его возможного значения.

Решение:

А) Скорость Черного стрижа может быть больше чем $1{,}56 \times 10^2$ км/ч = 156 км/ч ≈ 160 км/ч. А) → 3).

Б) Скорость звука примерно равна 1200 км/ч. Значит, для сверхзвукового самолета Ту 244 подойдет значение 2340км/ч. Б) → 4).

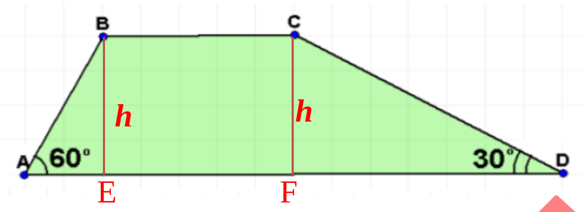
Г) Сероголовый альбатрос может развить скорость больше чем $0{,}147 \times 10^3$ км/ч или больше 147 км/ч. Г) → 1).

В) Для бабочки капустницы остается значение 36 км/ч. Такую скорость может развить чемпион мира по бегу на 100 м. Итак, В) → 2).

Заполняем таблицу:

А	Б	В	Г
3	4	2	1

Ответ: **3421.**



Примечание: Эта задача дана в варианте без номера и без ответа.

Задача. В трапеции **ABCD** угол **A** равен 60°, а угол **D** равен 30°, основания трапеции равны соответственно **BC** = $3\sqrt{3}$, **AD** = $13\sqrt{3}$. Найдите боковую сторону **CD**.

Решение:

Сделаем дополнительные построения (красным) — проведем высоты **BE** и **CF**. Теперь, по сути дела, задача сводится к нахождению высоты $\boldsymbol{h}$ — **CD** = $2\boldsymbol{h}$ (сторона, лежащая против угла в 30°, равна половине гипотенузы). Учитывая, что **EF** = **BC** = $3\sqrt{3}$ получаем:

$$\mathbf{AE} + \mathbf{DF} = \mathbf{10\sqrt{3}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Из прямоугольных треугольников **AEB** и **CFD** получаем:

$$\mathbf{DF} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{ctg}\mathbf{30°} = \boldsymbol{h}\sqrt{\mathbf{3}}; \qquad \mathbf{AE} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{ctg}\mathbf{60°} = \boldsymbol{h}/\sqrt{\mathbf{3}}.$$

Подставляя два последних равенства в (1) находим:

$\frac{h}{\sqrt{3}} + h\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 4h = 30 \quad \Rightarrow$и $\quad h = 7{,}5 \quad$ и **CD** = 15

Ответ: **15.**

16. Даны два конуса. Радиус основания и высота первого равны соответственно 18 и 6, а второго — 3 и 12. Во сколько объём первого конуса больше объёма второго?

Дано: **R** = 18; **H** = 6; $\boldsymbol{r}$ = 3; $\boldsymbol{h}$ = 12. Найти: **V**/ $\boldsymbol{v}$

Решение:

Объём конуса вычисляется по формуле: $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{H}$ или $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\pi R^2 \cdot H}$. Запишем:

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H}{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{(3 \cdot 6)^2 \cdot 6}{3^2 \cdot 12} = \mathbf{18}$$

В восемнадцать раз

Ответ: **18.** ***Примечание:*** В ответе **21** — опечатка. Следует читать **18**.

17. Дима, Вася и Миша решали 30 задач, причем каждый из них решил по 12 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один из мальчиков, и легкой, если ее решили все трое. Выберите утверждения, которые следуют из приведенных данных.

1) число легких задач меньше 3;

2) число трудных задач больше 26;

3) число трудных задач больше числа легких ровно на 24;

4) если один из трёх учеников решил 10 трудных задач, то другие двое в сумме решили ровно 16 трудных задач.

Решение: ***134***

Дима, Вася и Миша решали 30 задач. т.е. предполагается что каждая из 30 задач решена хотя бы одним из ребят.

Пусть

A — число задач **трудных** задач, которые решил только Дима;
B — **трудные** задачи решенные только Васей;
C — **трудные** задачи решенные только Мишей;
D —число задач, которые решены Димой и Васей, но не Мишей;
E — число задач, которые решены Васей и Мишей, но не Димой; } задачи средней сложности
F — число задач, которые решены Димой и Мишей, но не Васей;
G — число **легких** задач которые решили все трое.

Т. к. каждый из мальчиков решил 12 задач, то получаем систему:

$$\begin{cases} \mathbf{A+D+F+G=12} & \text{— все задачи, которые решил Дима;} \\ \mathbf{B+D+E+G=12} & \text{— все задачи, которые решил Вася;} \\ \mathbf{C+E+F+G=12} & \text{— все задачи, которые решил Миша;} \\ \mathbf{A+B+C+D+E+F+G=30} & \text{— все задачи, решенные парнями.} \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Разберем утверждение 3).

Умножим последнее уравнение на 2 и вычтем из него сумму первых трех уравнений

$$\mathbf{2\cdot(A+B+C+D+E+F+G)-[(A+D+F+G)+(B+D+E+G)+(C+E+F+G)]=}$$
$$\mathbf{=2\cdot 30-(12+12+12)}$$

$$\mathbf{2A+2B+2C+2D+2E+2F+2G-(A+B+C+2D+2E+2F+3G)=60-36}$$

$$\mathbf{(A+B+C)-G=24} \qquad \mathbf{(2)}$$

Т. о. получили, что утверждение 3) ***число трудных задач больше числа легких ровно на*** 24 — ***верно***.

Разберем утверждение 1).

В системе (1) из суммы первых трех уравнений вычтем 4-ое уравнение

$$\mathbf{[(A+D+F+G)+(B+D+E+G)+(C+E+F+G)]-A+B+C+D+E+F+G=36-30}$$
$$\mathbf{D+E+F+2G=6}$$

Т. к. $\mathbf{D+E+F\geq 0}$ (число задач), то отсюда следует, $\mathbf{G\leq 3}$. Если теперь окажется, что возможен случай, когда $\mathbf{G=3}$, то утверждение 1) будет ложным. Пусть $\mathbf{G=3}$. Тогда $\mathbf{D+E+F=0}$ или $\mathbf{D=E=F=0}$.

Подставляя полученные данные в систему (1) находим:

$$\begin{cases} \mathbf{A+3=12} \\ \mathbf{B+3=12} \\ \mathbf{C+3=12} \\ \mathbf{A+B+C+3=30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A=9} \\ \mathbf{B=9} \\ \mathbf{C=9} \\ \boldsymbol{G}\mathbf{=3} \end{cases}$$

Мы получили, что каждый из мальчиков решил по 9 трудных задач и по 3 легкие. Задач средней сложности не было вообще. Поскольку такой вариант возможен т. к. не противоречит условию задачи, то утверждение 1) ***число легких задач меньше*** **3** — ***неверно***.

Разберем утверждение 2).

Воспользуемся старой философской истинной: *"Для того что бы доказать истинность какого-либо утверждения необходимо провести доказательство или рассмотреть все возможные варианты, а что бы его опровергнуть достаточно привести один пример"*.

Во 2-ом утверждении говорится, что ***число трудных задач больше 26***. Построим контрпример. Пусть

Дима решил **A =** 10 трудных задач и **G =** 2 легкие;
Вася — **B =** 8 трудных, **E =** 2 средней сложности и **G =** 2 легкие;
Миша — **C =** 8 трудных, **E =** 2 средней сложности и **G =** 2 легкие.

Т. е

$$\begin{cases} \mathbf{A+G=12} & \text{— Дима} \\ \mathbf{B+E+G=12} & \text{— Вася} \\ \mathbf{C+E+G=12} & \text{— Миша} \\ \mathbf{A+B+C+E+G=30} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{10+2=12} \\ \mathbf{8+2+2=12} \\ \mathbf{8+2+2=12} \\ \mathbf{10+8+8+2+2=30} \end{cases}$$

Т. о. в этом примере получаем: $\mathbf{A+B+C=10+8+8=26}$ не больше 26.
Утверждение 2) может быть как ложным (см. контрпример), так и истинным (как в случае, когда мы разбирали утверждение 1)).
Резюмируем: ***утверждение 2) в общем случае неверно***.

Разберем утверждение 4).

Снова построим контрпример. Пусть

Дима решил **A =** 7 трудных задач, **D =** 1 и **F =** 3 средней сложности и **G = 1** легкую;
Вася — **B =** 10 трудных, **D =** 1 средней сложности и **G = 1** легкую;
Миша — **C =** 8 трудных, **F =** 3 средней сложности и **G =** 1 легкую.

Этот контрпример удовлетворяет системе (**1**). В самом деле:

$$\begin{cases} \mathbf{A}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{F}+\mathbf{G=12} & \text{— Дима} \\ \mathbf{B+D+G=12} & \text{— Вася} \\ \mathbf{C+F+G=12} & \text{— Миша} \\ \mathbf{A+B+C+D+F+G=30} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{7+1+3+1=12} \\ \mathbf{10+1+1=12} \\ \mathbf{8+3+1=12} \\ \mathbf{10+8+8+2+2=30} \end{cases}$$

Контрпример удовлетворяет системе (**1**), но при этом $\mathbf{A+C=7+8=15\neq 16}$.
Утверждение 4) может быть как ложным (см. контрпример), так и истинным (как в случае, когда мы разбирали утверждение 2)).
Резюмируем: ***утверждение 4) в общем случае неверно***.

Заметим, что и этот контрпример опровергает истинность утверждения 2), т. к. $7 + 10 + 8 = 25 < 26$.

Ответ:

1)	число легких задач меньше 3	неверно
2)	число трудных задач больше 26	неверно
3)	число трудных задач больше числа легких ровно на 24	верно
4)	если один из трёх учеников решил 10 трудных задач, то другие двое в сумме решили ровно 16 трудных задач	неверно

Примечание: Как известно, лучший экспромт тот, который подготовлен заранее. Поэтому покажем как мы, "совершенно случайно", наткнулись на последний контрпример.
Перепишем наши равенства (1) с учетом допущения **B** =10

$$\begin{cases} \mathbf{A+D+F+G=12} \\ \mathbf{D+E+G=2} \\ \mathbf{C+E+F+G=12} \\ \mathbf{A+C+D+E+F+G=20} \end{cases} \qquad \mathbf{(3)}$$

Тогда (**A + C + D + E + F + G) – (D + E + G) = 20 – 2** или **A + C + F = 18** и
(A + D +F +G) + (C + E + F + G) – (D + E +G) = 12 + 12 – 2 или **A + C + 2F + G = 22**
(A + C + 2F + G) – (A + C + F) = F + G = 4

Рассмотрим все возможные случаи.

1) F = 0; G = 4 — невозможно в силу ранее доказанного **G ≤ 3;**
2) Из **G = 3 ⇒ F = 1** что невозможно в силу ранее доказанного: **G = 3 ⇒ A = B = C = 9** и **D = E = F = 0;**
3) G = F = 2 — возможно. См. доказательство утверждения 2). Только здесь мы вместо **A = 10** взяли **B = 10.**
Соответственно, **F = 2, E = D =0, A = C = 8;**
4) G = 1; F = 3

Подставим эти значения в (3)

$$\begin{cases} A + D + 3 + 1 = 12 \\ D + E + 1 = 2 \\ C + E + 3 + 1 = 12 \\ A + C + D + E + 3 + 1 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 8 \\ D + E = 1 \\ C + E = 8 \\ A + C + D + E = 16 \end{cases}$$

и рассмотрим возможные варианты:

4.1.) G = 1, F = 3; D = 0 и **E =1 ⇒ A = 8, C = 7**

$$\begin{cases} 8 + 0 + 3 + 1 = 12 \\ 10 + 0 + 1 + 1 = 12 \\ 7 + 1 + 3 + 1 = 12 \\ 8 + 10 + 7 + 0 + 1 + 3 + 1 = 30 \end{cases}$$

4.2.) G = 1, F = 3; D = 1 и **E =0 ⇒ A = 7, C = 8**

$$\begin{cases} 7 + 1 + 3 + 1 = 12 \\ 10 + 0 + 1 + 1 = 12 \\ 8 + 0 + 3 + 1 = 12 \\ 7 + 10 + 8 + 1 + 0 + 3 + 1 = 30 \end{cases}$$

Два последних случая представляют собой симметричные контрпримеры, второй из которых мы и привели выше. В обоих случаях при **B = 10 A + C = 15 < 16**

Рассмотрим еще один интересный вопрос — возможен ли случай, когда из 30 предложенных задач не было ни одной сложной? Т. е.

5) G = 0; F = 4

$$\begin{cases} A + D = 8 \\ D + E = 2 \\ C + E = 8 \\ A + C + D + E = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + D = 8 \\ D + E = 2 \\ C + E = 8 \\ A + C = 14 \end{cases}$$

5.1.) G = 0; F = 4; D = 0; E = 2 ⇒ A = 8, C = 10 — невозможно, т. к. **A + C = 18 ≠ 14**;

5.2.) G = 0; F = 4; D = 1; E = 1 ⇒ A = 9, C = 9 — невозможно, т. к. **A + C = 18 ≠ 14**;

5.2.) G = 0; F = 4; D = 2; E = 0 — симметрично случаю 5.1.) — невозможно.

Точнее не возможно при таком раскладе.

Дополним задачу еще одним утверждение.

5) может ли среди 30 задач не оказаться ни одной легкой?

Рассмотрим пример: Дима решил 12 трудных задач. Вася и Миша решили по 6 трудных задач и 6 средней сложности.

Получаем систему:

$$\begin{cases} A = 12 \\ B + E = 12 \\ C + E = 12 \\ A + C + D + E = 30 \end{cases}$$

Итак: утверждение 5) — возможно.

18. Установите, по какому принципу выстроена данная последовательность: 3;10; 29; 66; …. . и найдите сумму чисел стоящих на пятом и шестом местах.

Решение:

Заметим, что

$$3 = 1^3 + 2$$
$$10 = 2^3 + 2$$
$$29 = 3^3 + 2$$
$$66 = 4^3 + 2$$

По аналогии находим 5-й и 6-й члены данной последовательности

$$5^3 + 2 = 127$$
$$6^3 + 2 = 218$$

Тогда $127 + 218 = 345$

Ответ: **345**. ***Примечание:*** В ответе опечатка. См. ответ к Задаче 18 Вариант II.

19. Найдите шестизначные числа вида $x2014y$ которые без остатка делятся на 45. В ответ запищите наименьшее из этих чисел.

Решение:

Число делится на 45, если оно делится на 5 и на 9.

Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5.

Число делится на 9, если сумма цифр его составляющих делится на 9.

Из сказанного следует:

1). $\boldsymbol{y=0}$ или $\boldsymbol{y=5}$.

Т. к. $2+0+1+4=7$, то $\boldsymbol{x=2}$, если $\boldsymbol{y=0}$ и $\boldsymbol{x=6}$, если $\boldsymbol{y=5}$.

Число 220 140 делится на 45 ($220\,140 : 45 = 4\,892$). Оно и будет наименьшим.

Ответ: **220 140**. ***Примечание:*** В ответе опечатка: в середине стоит 2015 вместо требуемого 2014.

20. Приведите пример, что число 2030 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр (наименьшее из этих чисел двузначное число). В ответ запишите наибольшую разность этих чисел?

Решение:

Для того, чтобы разность искомых чисел была бы наибольшей, необходимо, чтобы меньшее из них было наименьшим.

Эту задачу проще всего решить подбором.

Пусть 1-е число равно 10. Тогда второе — 2020. Сумма цифр этих чисел не совпадает: $1+0=1\neq 2+0+2+0=4$.

Далее составим таблицу.

1-ое число	2-ое число	Сумма цифр 1-го числа	Сумма цифр 2-го числа	
11	2019	2	12	не равна
12	2018	3	11	не равна
13	2017	4	10	не равна
14	2016	5	9	не равна
15	2015	6	8	не равна
16	2014	7	7	равна

Искомые числа 16 и 2014.

Ответ: **16; 2014**. ***Примечание:*** В ответе опечатка. Требуется найти 2 числа, а в ответе три и неправильные.

Решение задач варианта выполнил преподаватель математики ГБПОУ КО "Перемышльский техникум эксплуатации транспорта"

Кошавкин Сергей Геннадьевич.

Семь футов под килем!!!