IV. Простейшие элементарные функции и их графики

1.Понятие функции

Если ***каждому*** элементу $\boldsymbol{x}$ из множества **X** посредством какого-то правила (действия, операции) поставлен в соответствие ***один и только один*** элемент $\boldsymbol{y}$ из множества **Y**, то говорят, что на множестве **X** задана функция, отображающая множество **X**в множество **Y**. Обозначается это так:

$$x \xrightarrow{R} y \qquad \text{или} \qquad x \to y = \varphi(x) \text{ или еще короче} \qquad y = f(x)$$

При этом множество **X** называют ***множествомопределения функции*** или, чаще, ***областьюопределения функции***. Множество **Y** называют множеством значений функции. Переменную $\boldsymbol{x}$ называют независимой переменной или аргументом функции. Переменную $\boldsymbol{y}$ называют значением функции. Если имеется в виду такое-то определенное значение $\boldsymbol{x}$, например,$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$, то, говорят значение функции в точке $\boldsymbol{x_0}$ равно $\boldsymbol{y_0}$.

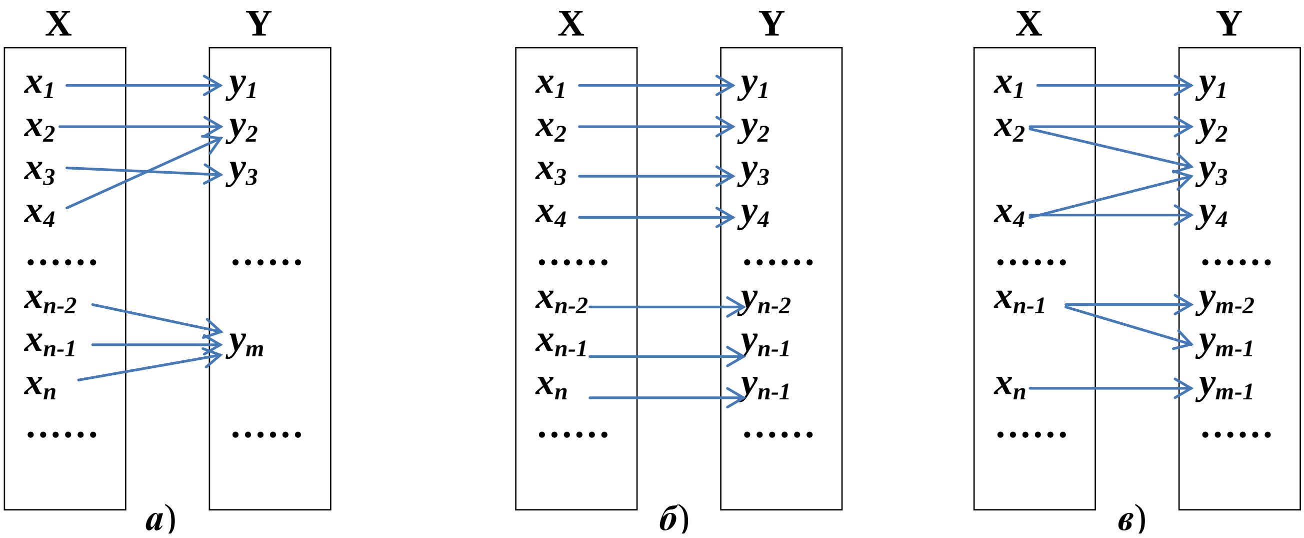


Рис. 1

На рис. 1 а) показана функция, отображающая**X** в **Y**.Заметим, что каждому $\boldsymbol{x}$ соответствует только одно значение $\boldsymbol{y}$. При этом различным значениям $\boldsymbol{x}$ может соответствовать одно и тоже значение $\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{x_2}$и $\boldsymbol{x_4}$отображаются на $\boldsymbol{y_2}$), тем не менее это функция — определение функции не нарушено.

На рис 1 б) показана ***взаимно однозначная*** функция.

Если ***каждому*** элементу $\boldsymbol{x}$ из множества **X** поставлено в соответствие ***одно и только одно*** значение $\boldsymbol{y}$ из множества **Y**, и при этом каждому $\boldsymbol{y} \in \mathbf{Y}$ соответствует ***одно и только одно*** значение $\boldsymbol{x}$ из множества **X**, то говорят, что на множестве **X** задана взаимно однозначная функция, отображающая множество **X**в множество **Y**.

Отображение, показанное на рис. 1 в) функцией не является, т.к. элементу $\boldsymbol{x_2}$поставлено в соответствие два значения из множества **Y**.

Примеры:$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ — квадратичная функция; $\boldsymbol{y = kx + b}$ — линейная функция, $\boldsymbol{y = a^x}$,$\boldsymbol{y = \log_a x}$ — показательная и логарифмическая функции.

2.Простейшие элементарные функции

К простейшим элементарным функциям относятся следующие функции:

1. $y = x^{\alpha}$ — степенная функция;
2. $y = a^{x}$ —показательная функция;

Четыре тригонометрические функции:

3. $y = \sin x$ —синус, синусоида, функция синуса;
4. $y = \cos x$ —косинус, косинусоида, функция косинуса;
5. $y = tgx$ — функция тангенса;
6. $y = ctgx$ —функция котангенса;
7. $y = \log_a x$ —функция логарифма, логарифмическая функция;

Четыре обратных тригонометрических функции:

8. $y = \arcsin x$ —функция обратная синусу;
9. $y = \arccos x$ —функция обратная косинусу;
10. $y = arctgx$ —функция обратная тангенсу;
11. $y = arcctgx$ —функция обратная котангенсу.

Мы рассмотрим большее число функций за счет того, что вместо одной степенной функции построим графики

1. прямой пропорциональной зависимости;
2. уравненияпрямой;
3. квадратичной параболы;
4. кубической параболы;
5. параболы$y = x^{\frac{1}{2}}$;
6. полукубической параболы;
7. обратной пропорциональной зависимости(гиперболы);
8. функции $y = |x|$.

3.Графики простейших элементарных функций

Множество точек с координатами (x; $f(x)$) называется графиком функции $y=f(x)$.

Определения возрастания и убывания функции, ее периода, мотнотонности, экстремума, максимума, минимума, наибольшего и наименьшего значения, точек перегиба, понятие асимптоты, четной и нечетной функции, а так же функции, обратной данной, будут даны в главе "Исследование элементарных функций".

1. Прямая пропорциональная зависимость

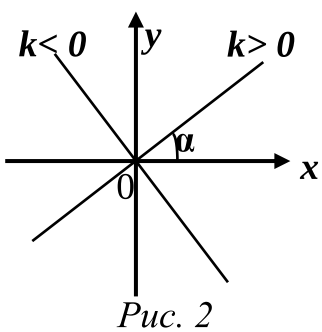


Рис. 2

Если переменные x и y связаны формулой $y= k\cdot x$ (1), то говорят, что между ними установлена прямо пропорциональная или линейная зависимость.

График этой зависимости изображен на рис. 2. График функции представляет из себя прямую линию, проходящую через начало координат и наклоненную к оси абсцисс под углом α. Тангенс угла α равен k.Уголαострый, если $k > 0$ и тупой, если $k < 0$. Случай $k = 0$ здесь не рассматривается (см. п. 3.2.). Константа k называется ***угловым коэффициентом***.

Область определения функции (ООФ) вся числовая прямая, т.е. $x \in \mathbb{R}$.

Множество значений функции (МЗФ) вся числовая прямая: $y \in \mathbb{R}$.

Функция ***монотонно*** возрастает на всей числовой прямой при $k>0$имонотонно убывает при $k< 0$.

Функция ***нечетная***.

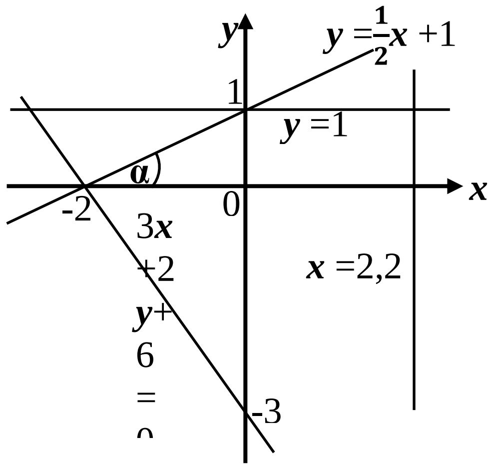


Рис. 3

2. Уравнение прямой

Уравнение прямой может быть задано одной из следующих формул:

$y = k \cdot x + b$(2) — уравнение прямой с угловым коэффициентом или

$\mathbf{A} \cdot x + \mathbf{B} \cdot y + \mathbf{C} = 0$ (3) — каноническое или общее уравнение прямой.(**A** и **B** не равны нулю одновременно).

Легко видеть, что если переписать уравнение (2) в виде $k \cdot x + (-1)\, y + b$ мы получаем частный случай (**B** = -1) уравнения (3). И наоборот, если разрешить уравнение (3) относительно y, то получим уравнение (2):

$$y = \left(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right) \cdot x + \left(-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right), \text{где } k = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \text{ и } b = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

Константа k называется у***гловым коэффициентом***. Константа b — ***начальнойординатой***.

При **A**≠0 и **B**≠0 прямая пересекает ось абсцисс в точке $x = -b/k$ (–**C**/**A**)иось ординат в точке $y=b$ (–**C**/**B**).

При $b = 0$(**C** = 0)прямая проходит через начало координат.

Прямая составляет с осью абсцисс угол $\boldsymbol{\alpha} = tgk(tg\,(-\mathbf{A}/\mathbf{B}))$.

При $k = 0$ (**A** = 0)получаем график функции$y=b$($y = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$) — прямую параллельную оси асисс.

При **B** = 0 получаем прямую $x = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$параллельную оси ординат. Заметим, что эта прямая не является графиком функции, т.к. одному и тому же значению $x=-\mathbf{C}/\mathbf{A}$ставится в соответствие бесчисленное количество значений y.

ООФ: $x \in \mathbb{R}$.МЗФ:$y \in \mathbb{R}$.

Функция монотонно возрастает на всей числовой прямой при $k>0$ имонотонно убывает при $k< 0$.

Пересекает ось **O**x в точке $\left(\frac{-b}{k}; \mathbf{0}\right)$, ось **O**$y$ в точке (0; b).

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки с координатами **A** (x_A; y_A) и **B** (x_B; y_B), записывается так:$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$, ее угловой коэффициент равен $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Если прямая отсекает на оси абсцисс отрезок длиной $\boldsymbol{m}$, а на оси ординат отрезок длиной $\boldsymbol{n}$, т.е. проходит через точки**A** (0; $\boldsymbol{m}$) и **B** ($\boldsymbol{n}$; 0), то ее уравнение может быть записано в виде: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=\mathbf{1}$ — уравнение прямой в отрезках. Ее угловой коэффициент равен $\boldsymbol{k}=-\frac{n}{m}$.

Уравнение прямойс заданным угловым коэффициентом $\boldsymbol{k}$ и проходящей через точку $\mathbf{A}(x_A; y_A)$ и имеет вид $(y–y_A) = k\cdot(x–x_A)$.

Функция $y= k\cdot x + b$ не является ни ***четной***, ни ***нечетной***.

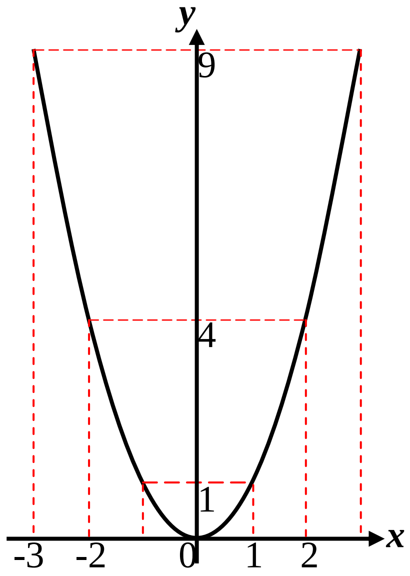


Рис. 4

3. Квадратичная парабола $y = x^2$

График этой функции показан на рис. 4.

График функции $y = ax^2$ получается из данного график путем простого изменения масштаба. Поэтому ограничимся случаем $a = 1$.

Функция определена на всей числовой прямой.

Множество значений: $y\in[0; +\infty]$.

$y\to+\infty$ при $x\to-\infty$ и при $x\to +\infty$.

Функция убывает на $x\in (-\infty; 0]$ и возрастает на $x\in[0; +\infty]$. Точка **O**(0;0) называется вершиной параболы.

Функция ***четная***.Касается оси **O*x*** и пересекает ось **O*y*** в точке **O**(0;0). В этой же точке функция имеет ***экстремум***. Точка **O**(0;0) — ***точка минимума***. Точек ***перегиба*** нет.

График функции симметричен относительно оси **O*y***. При $a<0$ график функции симметричен графику функции $y = ax^2$ ($a>0$) относительно оси **O*x***.

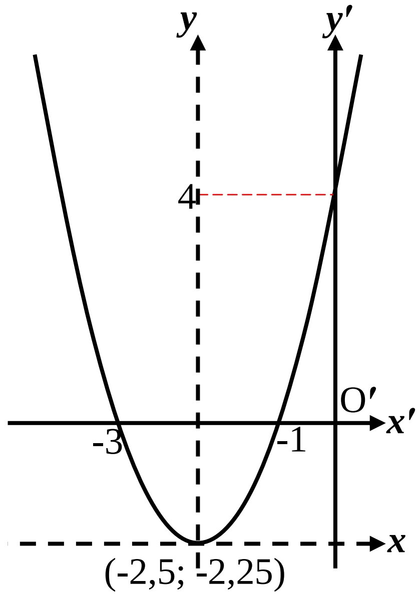


Рис. 5

График функции $y = ax^2+bx+c$ получается из графика функции $y = ax^2$ путем сдвига координатных осей.При этом ось ординат сдвигается на единиц $c-\frac{b^2}{4a}$ влево, а ось абсцисс на $\frac{-b}{2a}$ единиц вниз. График функции $y = x^2+ +5x+4$ показан на рис. 5. Он получен из графика функции $y = x^2$, путем переноса оси ординат на $\mathbf{4}-\frac{5^2}{4\cdot 1}=-\mathbf{2,25}$ единиц влево (знак "–" поэтому сдвигаем вправо) и оси абсцисс на $\frac{-5}{2\cdot 1}=-\mathbf{2,5}$ единиц вниз (знак "–" поэтому сдвигаем вверх).

Заметим, что для того, чтобы изобразить график функции $y = 2x^2 + 10x+8$ (или $y = \frac{1}{2}x^2 + 2{,}5x+ + 2$) достаточно на рис. 5 поменять всего два числа: вместо 4 написать 8 (2) и вместо – 2,25 поставить –4,5 (–1,125)

График параболы $y = ax^2+bx+c$ симметричен относительно прямой параллельной оси **O**y и проходящей через точку $c-\frac{b^2}{4a}$.Вершина параболы лежит в точке **C**($\frac{-b}{2a}$;$c-\frac{b^2}{4a}$) — точка минимума.

Если **D** = $b^2 - 4ac > 0$график пересекает ось **O**x ровно в двух точках:

A$_1$ ($\frac{-b-\sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$; 0) и**A**$_2$ ($\frac{-b+\sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$; 0).

При **D** = 0 график касается оси **O**x в точке **A** ($\frac{-b}{2a}$; 0).

При **D**< 0 график лежит выше оси абсцисс.

График пересекает ось **O**y в точке **M** (0; b).

4. Кубическая парабола $y = x^3$

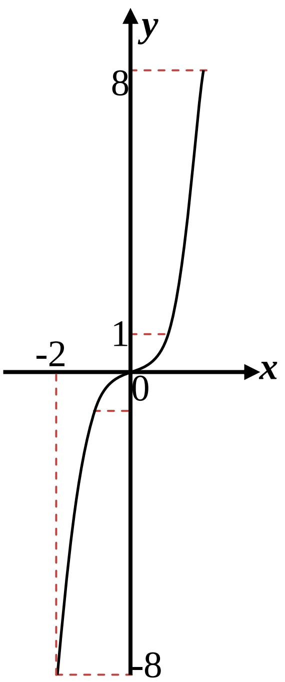


Рис. 6

Область определения функции:$x \in (-\infty; +\infty)$

Множество значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.

$y \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$при $x \to +\infty$.

Возрастает на всей числовой прямой.

Центр симметрии — начало координат.

В точке **O** (0; 0) имеет точку перегиба и пересекает оси координат. ***Нечетная*** функция.

Для построения графика функции $y = ax^3$ достаточно изменить масштабный отрезок по оси **O**y в a раз.

Для построения графика $y = -ax^3$ необходимо построить график симметричный графику функции $y = ax^3$ относительно оси **O**x.

График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx^2 + d = 0$ может иметь различный вид. Он всегда пересекает ось **O**x по крайней мере в одной точке, но может иметь и две и три точки пересечения. Всегда имеет ровно одну точку перегиба. Может либо совсем не иметь экстремумов, либо имеет один максимум и один минимум. Если известны коэффициент a, значение $\Delta = 3ac - b^2$ и дискриминант $D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$, то можно достаточно точно описать кривую.

Если $a > 0$, то $y \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Если $a < 0$, то $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

При $\Delta > 0$ функция не имеет экстремумов, но имеет точку перегиба.

При $\Delta = 0$ функция так же не имеет экстремумов и имеет точку перегиба. В этом случае касательная проведенная в точке перегиба параллельна оси **O**x.

При $\Delta < 0$ и $a > 0$ функция имееттточку перегиба, один максимум в точке $x_{\max} = (-b - \sqrt{-\Delta})/(3a)$и один минимум в точке $x_{\min} = (-b + \sqrt{-\Delta})/(3a)$. Точка перегиба лежит между точками $x_{\max}$ и $x_{\min}$.

При $\Delta < 0$ и $a < 0$ точка максимума становиться точкой минимума, затем следует точка перегиба и, наконец, точка максимума, после которой функция монотонно убывает.

При **D**> 0 график пересекает ось абсцисс в трех точках

При **D**= 0 график имеет либо одну, либо две точки пересечения с осью **O*x***. Если точек пересечения две, то одна из них является точкой касания.

При **D**< 0 график имеет ровно одну точку пересечения с осью **O*x***.

Точка перегиба имеет координаты $\left(\frac{-b}{3a};\ \frac{2b^3-9abc}{27a^2}+d\right)$ и является центром симметрии кривой.

5. Парабола $y = x^{\frac{1}{2}}$

В школе, при построении графика этой функции обычно строят только верхнюю ветвь параболы. При таком построении, мы получаем график, непротиворечивый определению функции, которое мы дали в пункте 1 этой главы.

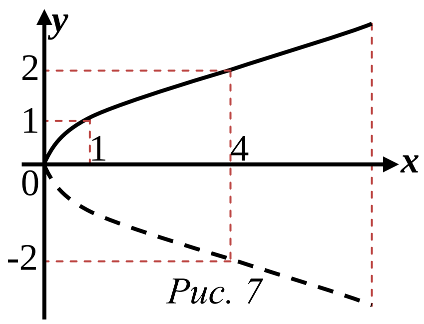


Рис. 7

Однако, в том же школьном курсе, уже при решении квадратных уравнений, приходится рассматривать два значения подкоренного выражения — положительное и отрицательное. Функции, где каждому ***x***соответствует два значения из множества **Y** называются***двузначными***.

На рис. 7 изображен график именно такой функции. Так, значению x = 4 ставится в соответствие y_1= 2 и y_2= –2, значению x = 0 ставится в соответствие y_3= +0и y_4= –0. И т.д.

Как видим, график симметричен относительно оси абсцисс. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только верхней ветви параболы.

Функция определена на луче [0; +∞].

Множество значений: $y \in [0; +\infty]$.

Функция возрастает на всей области определения и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Точек экстремума и перегиба нет, но функция имеет наименьшее значение: при x = 0 y= 0.

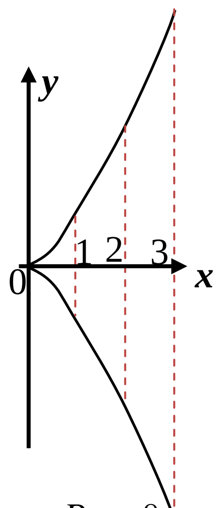


Рис. 8

6. Полукубическая парабола $y = x^{\frac{3}{2}}$

На рис. 8 представлен еще один пример двузначной функции. Область ее определения луч [0; +∞]. Множество значений вся числовая прямая (мы имеем в виду обе ветви параболы).

Функция не имеет точек экстремума и перегиба.

Ее верхняя ветвь — возрастающая функция: $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Нижняя —убывающая $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

График функции симметричен относительно оси **O*x***.

Если рассматривать только верхнюю ветвь, то функция имеет наименьшее значение: в точке x = 0 y= 0. И, соответственно для нижней ветви, функция имеет наибольшее значение y= 0.

7. Обратная пропорциональнаязависимость $\mathbf{y = \frac{a}{x}}$

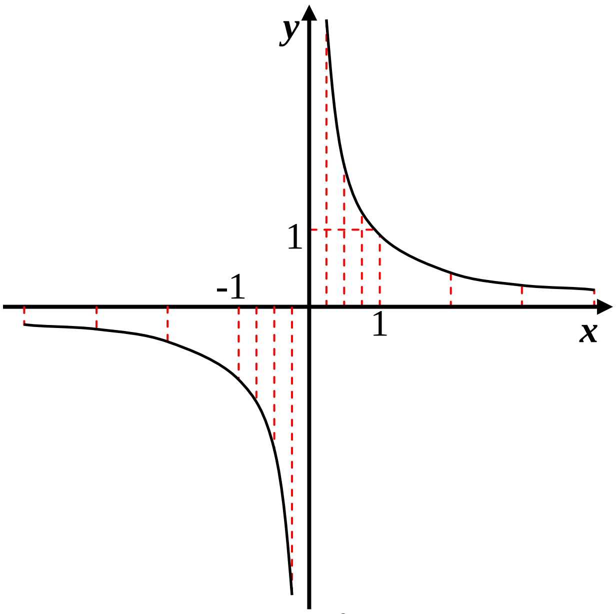


Рис. 9

Вновь ограничимся случаем a=1. График функции изображен на рис. 9. Он представляет собой ***равностороннюю гиперболу*** с вершинами в точках $\mathbf{A}_1(\sqrt{a}; \sqrt{a})$ и $\mathbf{A}_2(-\sqrt{a}; -\sqrt{a})$.

Область определения функции:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Множество значений:

$$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Нечетная функция.

В точке $x = 0$ функция не определена.При $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ $y \to 0$.

При $x \to 0$ слева $y \to -\infty$, при $x \to 0$ справа $y \to -\infty$.

Точка **O** (0; 0) является центром симметрии графика функции.

Точек экстремума и перегиба нет. График имеет в качестве ***асимптот*** оси координат.

Функция монотонно убывает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. График лежит внутри 1-го и 3-го квадрантов.

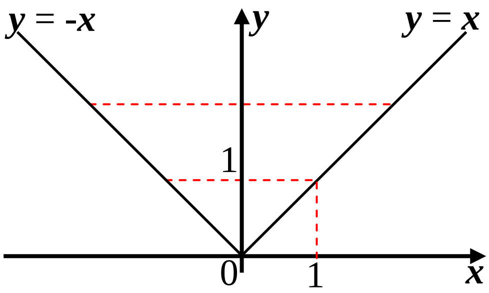


Рис. 10

8. График функции $y = |x|$

ООФ: $x \in \mathbb{R}$.МЗФ: $y \in [0; +\infty]$. Функция четная. Ось **O*y*** — ось симметрии.

Функция не имеет экстремумов и точек перегиба. Наименьшее значение $y = 0$ достигается в точке $x = 0$.Функция ***четная***.

График этой функции представляет собой совокупность графиков функций $y = -x$ и $y = x$ определенных на лучах $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ соответственно. Функция монотонно убывает на первом промежутке и монотонно возрастает на втором.

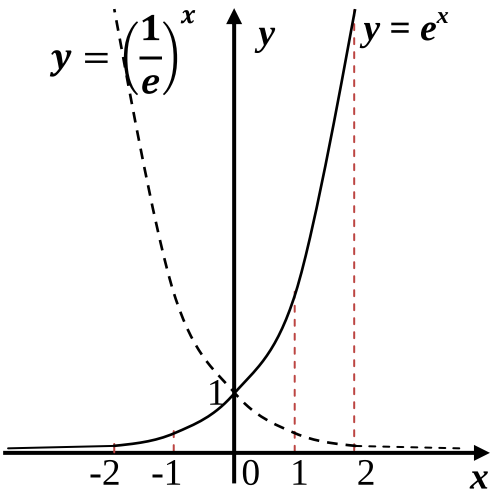


Рис. 11

9. Показательная функция $y = a^x$

Для этой функции установлены следующие ограничения: a>0 и $a \neq 1$.

Функция определена на всей числовой прямой. Область определения — луч $[0; +\infty)$.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает. Графики показательных функций с основаниями a и $(1/a)$ симметричны относительно оси **O*y*** и имеют ось **O*x*** асимптотой.При любом допустимом значении a график функции проходит через точку (0; 1). Показательную функцию еще называют ***экспоненциальной*** функцией, а ее график ***экспонентой***.

10. Фукция $y = sinx$

Синусоида — график функции $y = \sin x$ — показана на рис. 12.
Определена на всей числовой прямой. Множество значений — [–1; 1].
Возрастает на промежутках $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$
Убывает на промежутках$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$.
Точки $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — точки максимума.
Точки $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — точки минимума.

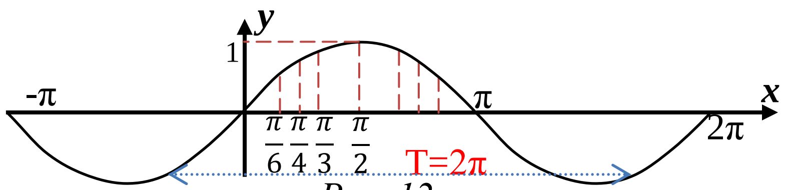


Рис. 12

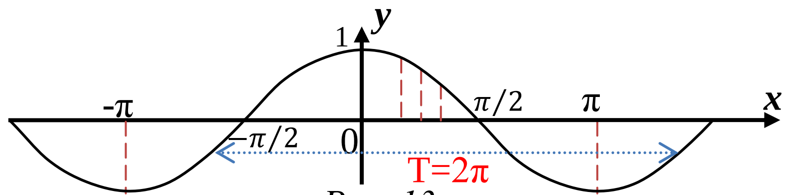


Рис. 13

Имеет перегибы в точках πk. В этих же точках пересекает ось **Ох**.Ось **Оу**пересекает в точке $x = 0$.

Имеет период: Т = 2π.

Нечетная функция.

Во всех приведенных формулах $k \in \mathbb{Z}$.

11. Фукции $y = cosx$

Т.к. $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, то, график функции $y = \cos x$ — сдвинутая по оси xна$-\frac{\pi}{2}$синусоида (см. рис. 13). Или, что тоже самое, путем перемещения оси ординат на рис. 12 на $\frac{\pi}{2}$ единиц вправо получаем график косинуса. Более подробно о преобразовании графиков функции см. пункт 4.3 этой главы.

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой.Множество значений — $y \in [-1;\ 1]$.Возрастает на промежутках $((2k-1)\pi;\ 2\pi k)$. Убывает на промежутках $(2\pi k;\ (2k+1)\pi)$.

Точки$x = 2\pi k$ — точки максимума. Точки $x = (2k+1)\pi$ — точки минимума. Ось абсцисс пересекает в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. В этих же точках имеет перегибы. Период Т = 2π. Четная функция. Во всех приведенных формулах $k \in \mathbb{Z}$.

12. Фукция $y = tgx$

Область определения этой функции представляет собой бесконечное число открытых интервалов $(-\pi/2+\pi n;\pi/2+\pi n)$. В каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает и имеет ноль в точках $x = \pi n$. Эти же точки являются точками перегиба.Период функции Т = π. В точках $\pi/2+\pi n$ график имеет вертикальные асимптоты. В точках $\pi/2+\pi n$ функция не определена.

Функция нечетная.Множество значений — вся числовая прямая.

Во всех приведенных формулах $n \in \mathbb{Z}$. См. рис. 14.

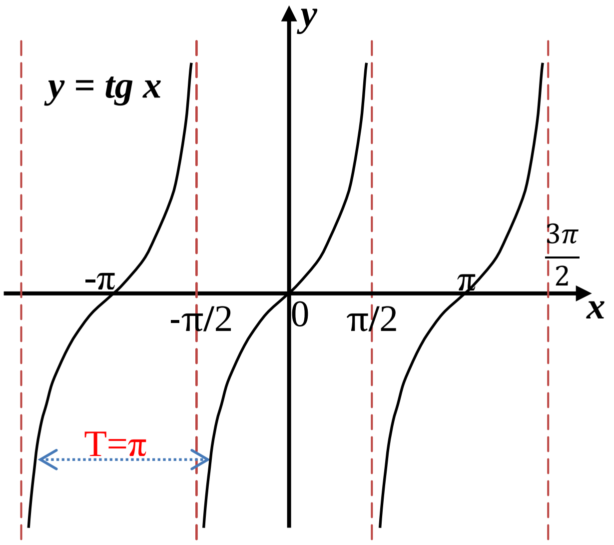


Рис. 14

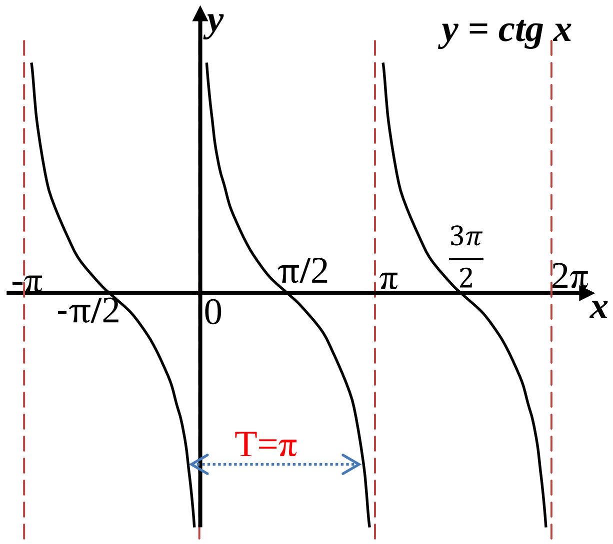


Рис. 15

13. Фукция $y = ctgx$

Область определения этой функции представляет собой бесконечное число открытых интервалов ($n\pi$;$(n+1)\pi$). В каждом из этих интервалов функция монотонно убывает и имеет ноль в точках $x = \pi/2+\pi n$. Эти же точки являются точками перегиба.Период функции Т = π. В точках $x = \pi n$ график имеет вертикальные асимптоты. В этих же точках функция не определена.

Функция нечетная.Множество значений — вся числовая прямая.

Во всех приведенных формулах $n\in\mathbb{Z}$. См. рис. 15.

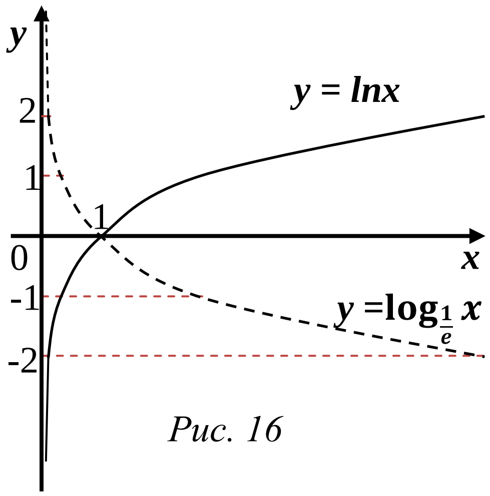


Рис. 16

14. Фукция $y = log_a x$

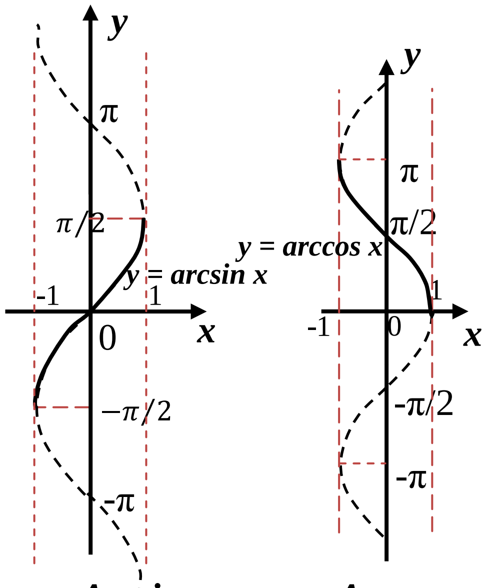
Эта функция является обратной для показательной функции $y = a^x$. Поэтому, в соответствии со свойствами обратной функции, имеем: $x\in$ [0; + ∞) и$y\in\mathbb{R}$.

Как и в случае с показательной функцией, для логарифмической функции установлены следующие ограничения: a>0 и $a\neq$ 1.

При a> 1 функция монотонно возрастает, при 0<a< 1 — убывает. Графики показательных функций с основаниями a и (1/a) симметричны относительно оси **Ох** и имеют ось **Оy** асимптотой.При любом допустимом значении a график функции проходит через точку (1; 0).

15. Обратные тригонометрические фукции

Функция $y = arcsinx$(см. рис. 17) является обратной для функции $y = sinx$ на отрезке [-π/2;π/2]. Поэтому ее график получается из части синусоиды путем отображения относительно прямой $y = x$. Область определения функции отре-



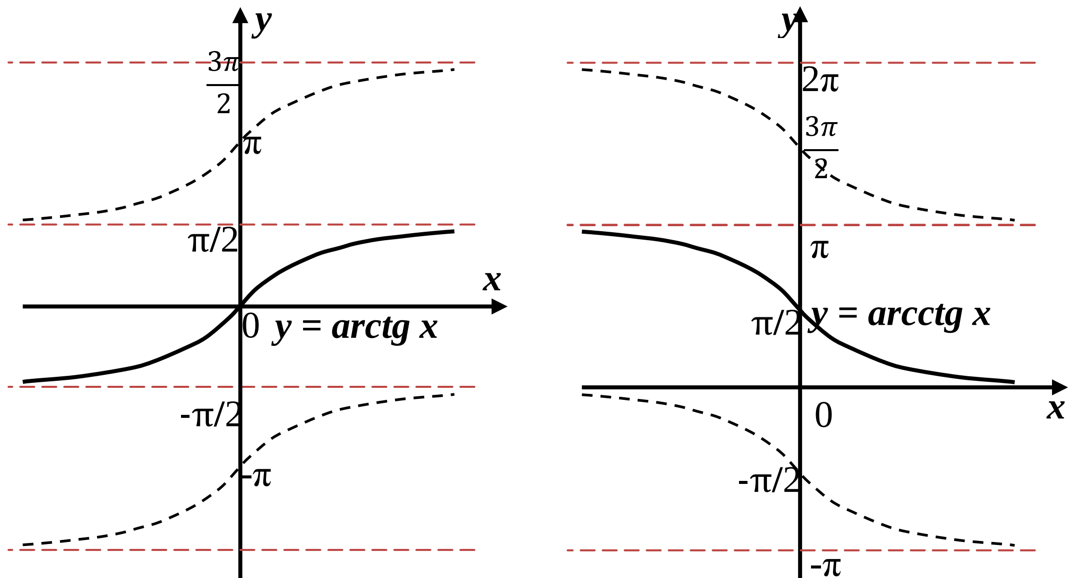
y* = *Arcsin x ***y* = *Arccos x***

Рис. 17

зок [-1; 1], а множество значений $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Функция монотонно возрастает на всей области определения и пресекает координатные оси в точке **O**(0;0). В этой же точке функция имеет перегиб.

Функция ***y*** = ***arccosx*** является обратной для функции ***y*** = ***cosx*** на отрезке [0; π](см. рис. 17).Поэтому ее график получается из части графика косинуса путем отображения относительно прямой ***y*** = ***x*** — биссектрисы первого и третьего координатных углов. Область определения функции отрезок [-1; 1], а множество значений $0 \leq y \leq \pi$. Функция монотонно убывает на всей области определения и пресекает ось ***x*** в точке (1;0), а ось ***y*** в точке (0;π/2). В этой же точке функция имеет перегиб.

Функция ***y*** = ***arctgx***(см. рис. 18) является обратной к функции ***y*** = ***tgx*** на интервале(-π/2;π/2). Поэтому ее график получается путем зеркального отображения одной из ветвей графика тангенса относительно прямой ***y*** = ***x***. Область определения этой функции вся числовая прямая, а множество значений — интервал(-π/2;π/2). Функция монотонно возрастает на всей числовой прямой. Функция имеет точку перегиба в точке **O**(0;0). Функция имеет две горизонтальные асимптоты: ***y*** = π/2 и ***y*** = -π/2.



y* = *Arctg x *Рис. 18* ***y* = *Arcctg x***

Функция ***y*** = ***arcctgx***(см. рис. 18) является обратной к функции ***y*** = ***ctgx*** на интервале (0;π). Поэтому ее график — зеркальное отображения соответствующей ветви графика функции ***y*** = ***ctgx*** относительно прямой ***y*** = ***x***. Область определения этой функции вся числовая прямая, а множество значений — интервал (0;π). Функция монотонно убывающая. Функция имеет точку перегиба (0;π/2). Функция имеет две горизонтальные асимптоты: ***y*** = π и ось абсцисс.

Все обратные тригонометрические функции являются ***многозначными функциями***, т.е. функциями, в которых каждому значению x ставится в соответствие бесконечное множество значений y. Поэтому, согласно приведенному в пункте 1 этой главы определению функции, мы и поставили вопрос о рассмотрении так называемых ***главных значений*** этих функций (на рис. 17 и 18 главные значения выделены жирным). Однако целый ряд задач математики и физики требует, рассмотрения не только главных значений.

Если x действительное число, принадлежащее отрезку[-1; 1], то множество всех действительных значений y таких, что $x = \sin y$ обозначают $Arcsin x$.Или, по-другому: $Arcsin x = \{y \mid x = \sin y\}$. В каждом таком множестве существует единственное значение $y_0 = \arcsin x$, которое называется ***главным значением*** $Arcsin x$. Из сказанного следует, что $y \in Arcsin x$ только в том случае, если существует $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $y = (-1)^n \cdot \arcsin x + n\pi$.

Аналогично получаем: $y \in Arccos x$ только тогда, когда существует $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $y = \pm \arccos x + 2n\pi$.

Если $x \in (-\infty;\infty)$, то $y \in Arctg x$ только тогда, когда существует $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $y = \operatorname{arctg} x + n\pi$.

И, наконец, $y \in Arcctg x$ только тогда, когда существует $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $y == \operatorname{arcctg} x + n\pi$.

4. Построение графиков элементарных фукций

Элементарными *называются функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций из простейших элементарных функций.*

Примеры:

$y = 5 \cdot \sin(3x+\pi) + 2$ — элементарная функция полученная из функции синус с помощью арифметических действий;

$y = \log_3^2 x$ — возведение простейшей элементарной функции в квадрат;

$y = \sin x + \cos x$ — суперпозиция связывающая знаком "+" функции синуса и косинуса;

$y = e^{\sin x}$ — суперпозиция экспоненциальной функции и функции синус.

Поставим задачу: по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $Y = A \cdot [f(kx+b)] + C$.Разобьем эту задачу на несколько этапов.

1. Построение графика фукции $y = A \cdot f(x)$

В качестве функции $f(x)$ рассмотрим квадратичную параболу $y = x^2$ и построим параболу $Y = 2 \cdot x^2$.Как уже отмечалось в пункте 3.3 этой главы, для построения такого графика достаточно лишь изменить масштабный отрезок на оси ординат. Но мы поступим другим образом. Построим график функции $y = x^2$. Т.к. функция четная, достаточно построить только правую ветвь. Левую получим путем отображения правой ветви относительно оси y.Составляем таблицу 1.

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9
Y	0	2	8	18

Табл. 1

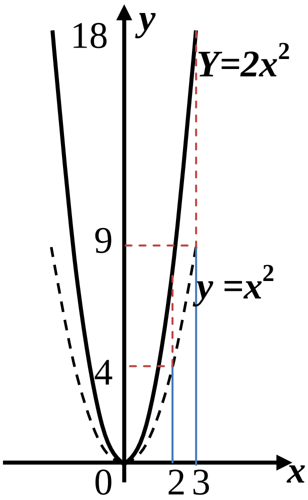


Рис. 19

Как видим, каждая ордината нового графика получатся умножением соответствующей ординаты старого графика на 2.См. рис. 19. Таким образом:

1. *Чтобы построить график функции* $\boldsymbol{Y = A\cdot f(x)}$*, достаточно растянуть график функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *от оси абсцисс в* **A***раз. При этом, если* **A**>1*, то будет растяжение, при* 0<**A**<1 *— сжатие. В случае, когда* **A**< *0 к указанному преобразованию следует добавить еще преобразование симметрии относительно оси* ***x***.

2. Построение графика фукции *y = f(kx)*

В качестве примера рассмотрим синусоиду. Пусть требуется построить график функции $\boldsymbol{Y = \sin(2x)}$.На отрезке от -2π до 2π строим синусоиду. (Достаточно построить график на отрезке от 0 до $\boldsymbol{\pi/2}$).Нетрудно видеть, что новый график получается из старого, если единичный отрезок по оси абсцисс уменьшить в два раза. См. рис. 20.

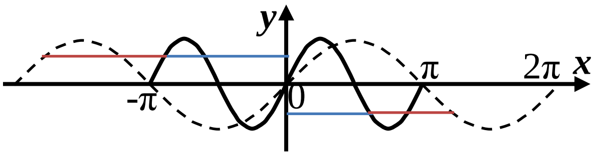


Рис. 20

2. *Для чтобы построить график функции* $\boldsymbol{Y = f(kx)}$ *достаточно равномерно в* ***k*** *раз сжать к оси ординат график функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$*. При этом, если* ***k***>1*, то происходит сжатие, при* 0 <***k***< 1 *— растяжение. Если* ***k***< *0, то необходимо еще построить отображение последнего графика относительно оси ординат.*

3. Построение графика фукции *y = f(x+b)*

В пункте 3.11 этой главы мы уже строили график функции $\boldsymbol{y = \cos x}$, как график функции $\boldsymbol{Y = \sin(x+\frac{\pi}{2})}$. Поэтому здесь только отметим:

3. *Длячтобы построить график функции* $\boldsymbol{Y = f(x+b)}$ *достаточнографик функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$*сдвинуть по оси* ***x****на* ***b*** *единиц влево, если* ***b***>0 *или на* ***b*** *единиц вправо, если* ***b***<0.

4. Построение графика фукции *y = f(x) +* C

В качестве исходного рассмотрим график функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ и построим график функции$\boldsymbol{Y = \sqrt{x}+5}$. Составим таблицу 2. Нетрудно видеть, что все ординаты нового графика отличаются от ординат старого графика ровно на 5 единиц. Таким образом:

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4
Y	5	6	7	8	9

Табл. 2

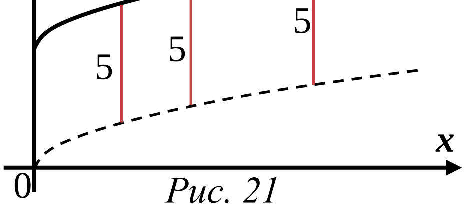


Рис. 21

4. *Длячтобы построить график функции* $\boldsymbol{Y = f(x)+ C}$*достаточнографик функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$*сдвинуть по оси* ***y****на* **C** *единиц вверх, если* **C**>0 *или на* **C** *единиц вниз в противном случае.*

Задача, поставленная в начале этого пункта полностью решена: теперь мы можем строить график функции $Y = A\cdot[f(kx+b)]+C$ если нам известен график функции $y = f(x)$.

5. Построение графиков фукцийу $y = f(-x)$, $y= -f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = f(-|x|)$, $y =|f(x)|$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = f(|x|)$

Эта тема подробно рассматривается на наших занятиях

6. Построение суперпозиции фукций

Пусть теперь требуется построить график функции $Y = x^2 – \sqrt{x}$.

Т. к. функция $y = \sqrt{x}$определена на полуоткрытом интервале [0; +∞], то и вся функция $Y = x^2 – \sqrt{x}$ определена на этом же луче. При построении графика функции $y = \sqrt{x}$ будем учитывать только верхнюю ветвь этой параболы.

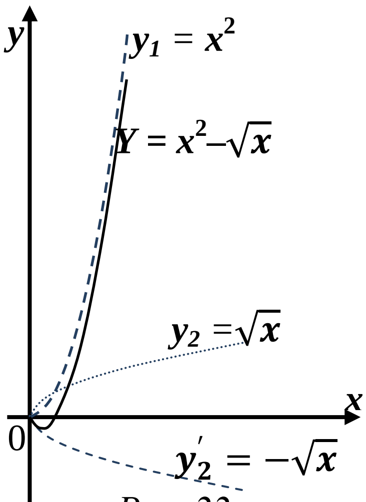


Рис. 22

Выполняем последовательно следующие действия:

1. Строим график функции $y_1 = x^2$;

2. Строим график функции $y_2 =\sqrt{x}$;

3. Т. к. перед корнем стоит знак "–" (**A** = –1), то выполняем преобразование симметрии относительно оси абсцисс — получаем график функции $y_2' = -\sqrt{x}$;

4. К каждой ординате первого графика прибавляем (в данном случае отнимаем) соответствующую ординату последнего графика — получаем график искомой функции.

7. Построение графика сложной фукций

Пусть даны графики функций $y = f(u)$и $u = \varphi(x)$ (см. рис. 23 а) и б)) и требуется построить график сложной функции $y = f(\varphi(x))$. Выполняем последовательно следующие действия:

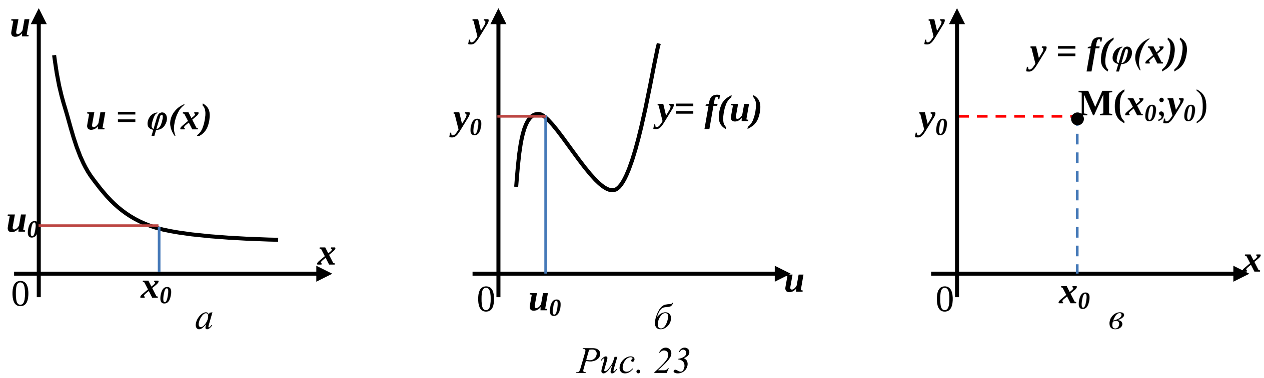


Рис. 23

1. Выбираем некоторое значение $x = x_0$ и находим по нему значение функции $u_0 = \varphi(x_0)$(см. рис. 23 а));

2. На оси **Ou** откладываем значение u_0 и находим по нему значение функции в этой точке (рис. 23 б)), т.е. $y_0 = f(u_0)$;

3. Строим еще одну координатную плоскость $\boldsymbol{xOy}$. Строим в этой плоскости точку с координатами ($\boldsymbol{x_0}$; $\boldsymbol{y_0}$) (рис. 23 в));

4. Повторяем шаги 1 – 3 до тех пор, пока не будет построено достаточное количество точек. Соединяем между собой полученные точки.

5. Графический смысл нахождения корней уравнения

Изображение графиков функций на координатной плоскости позволяет легко найти приближенное решение любого уравнения с одним неизвестным или системы уравнений с двумя неизвестными.

Пример1:Найти корни квадратного уравнения $x^2+6x+4=0$.

Нам требуется найти точки пересечения графика функции $y = x^2+6x+4$ с осью $\mathbf{O}x$. Замечаем, что $x^2+6x+4=(x+3)^2-5$.Строим график функции $y = x^2$.

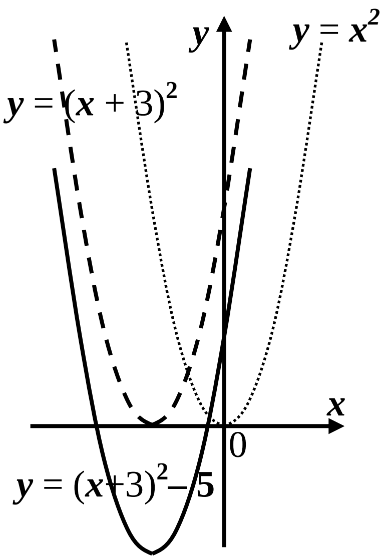


Рис. 24

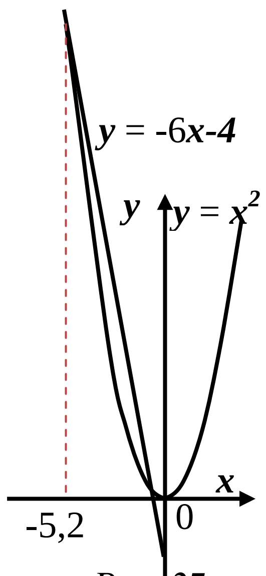


Рис. 25

Сдвигаем его на 3 единицы влево вдоль оси $\mathbf{O}x$ (b = 3) и опускаем на 5 единиц вниз вдоль оси $\mathbf{O}y$ ($\mathbf{C}$ = –5). Как видно из рисунка 24 корни данного уравнения примерно равны: x_1 =–5,2 и x_2 = –0,8. Точные значения корней равны $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{5}$.

Для того, чтобы найти решение системы двух уравнений с двумя неизвестными, необходимо каждое из этих уравнений рассмотреть как функциональную зависимость y от x и для каждого из них построить график. Точки пересечения графиков функции и есть искомые корни. Рассмотрим предыдущий пример как систему уравнений $y_1 = x^2$и $y_2 = -6x-4$. Строим графики этих функций — параболу и прямую (См. рис.25).

Заметим, что и в первом случае мы, собственно говоря, решали систему уравнений: $y = x^2+6x+4$ и $y = 0$, т. е. находили точки пересечения графиков этих функций.

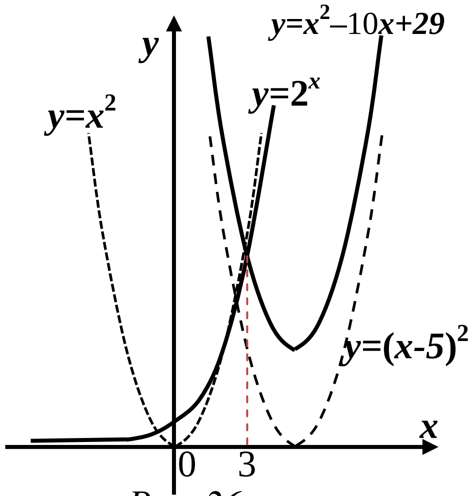


Рис. 26

Пример2:

Найти корни уравнения $2^x = x^2-10x+29$.

Это уравнение не приводится к алгебраическому, т.к. слева стоит трансцендентная функция, а справа полином. Такие уравнения проще всего решать графически. Для этого преобразуем правую часть уравнения к виду:

$$y=(x-5)^2+4.$$

Строим графики функций.Корень $\boldsymbol{x} = 3$. См. рис. 26.