Формула Герона.

Теорема: Площадь треугольника, длины сторон которого равны $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, находится по формуле:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Доказательство:

1-й способ:

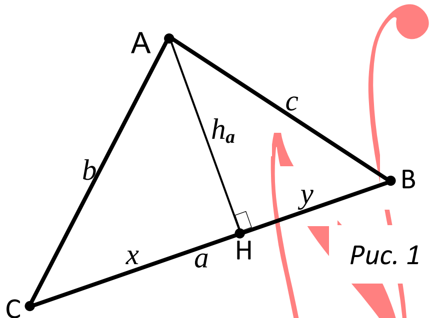

Рис. 1

Рассмотрим треугольник $\boldsymbol{ABC}$ где,

$$|AB| = c, \qquad |BC| = a, \qquad |AC| = b$$

. Пусть $|\boldsymbol{AH}| = h_a$ — высота треугольника $\boldsymbol{ABC}$, проведенная из вершины **A**.

Обозначим $|CH| = x, |BH| = y$.

Тогда $a = x + y$, и по теореме Пифагора из треугольников $\boldsymbol{AHC}$ и $\boldsymbol{BHA}$ соответственно имеем:

$$h_a^2 = b^2 - x^2 = c^2 - y^2,$$

откуда

$$y^2 - x^2 = c^2 - b^2 \text{ или } (y-x)(y+x) = c^2 - b^2$$

Учитывая, что $x + y = a$, получаем $(y-x)a = c^2 - b^2$ и $y - x = \frac{1}{a}(c^2 - b^2)$.

Сложив последнее равенство с равенством $y + x = a$, получим

$$2y = a + \frac{c^2 - b^2}{a} \text{ или } y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Теперь найдем высоту h_a треугольника:

$$h_a^2 = c^2 - y^2 = (c-y)(c+y) = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} \times \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} \times \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} =$$

$$= \frac{(b - a + c)\cdot(b + a - c)}{2c} \times \frac{(a + c - b)\cdot(a + c + b)}{2c}.$$

Поскольку

$$p = \frac{1}{2}\cdot(a + b + c)$$

то

$$b + c - a = 2p - 2a, \quad a + b - c = 2p - 2c, \quad a + c - b = 2p - 2b, \quad a + b + c = 2p$$

Подставляем эти выражения в найденное выражение для h_a^2 получаем:

$$h_a^2 = \frac{(2p-2a)\cdot(2p-2c)\cdot(2p-2b)\cdot 2p}{4a^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}.$$

Учитывая то, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a$, получаем требуемое.

Одновременно мы вывели формулу выражающую высоту треугольника, опущенную из вершины **A** треугольника, через стороны этого треугольника:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

2-й способ:

Воспользуемся тремя известными формулами:

$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha}$, **(1)**

теоремой косинусов

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$, **(2)**

и тригонометрическим выражением

$\boldsymbol{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$. **(3)**

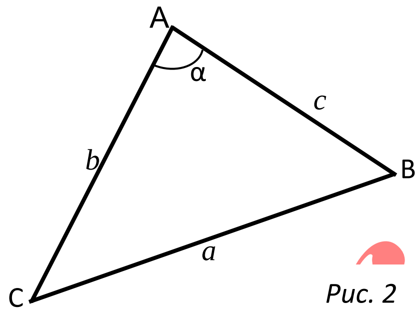

Рис. 2

Из теоремы косинусов следует:

$$\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]^2.$$

Возведя обе части равенства (1) в квадрат и учитывая, что $\boldsymbol{\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma}$ получим:

$$S^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} b^2 c^2 \left[1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[b^2c^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4}\right] = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{16}(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2bc - b^2 - c^2 + a^2) =$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2]}{16} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{16} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{16} =$$

$$= \frac{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{16} = p(p-a)(p-c)(p-b).$$

Таким образом получаем искомую формулу: $\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Замечание:

Внутри последнего преобразования мы подставили в формулу вместо $\boldsymbol{\sin^2 \alpha}$ выражение $\boldsymbol{1 - \cos^2 \alpha}$ и разложили последнее как разность квадратов. В результате получили довольно громоздкий вывод. Можно поступить следующим образом:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)}$$

Заметив, что

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p-c)$$

и аналогично

$$a + c - b = 2(p-b), \qquad b + c - a = 2(p-a)$$

отдельно преобразуем каждый из сомножителей в подкоренном выражении.

Имеем:

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-a^2+2ab}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} = \frac{2(p-a)p}{bc}.$$

Значит

$$\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя полученное значение синуса в формулу (1) находим требуемое.

3-й способ:

Докажем несколько утверждений.

Лемма 1. Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$\boldsymbol{S = p \cdot r} \qquad \textbf{(4)}$$

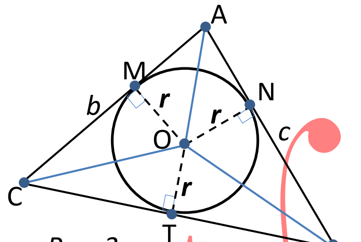

Рис. 3

Дано:
АВС – произвольный треугольник;
a, ***b*** и ***c*** – стороны этого треугольника (см. рис. 3);
Or – окружность с центром в точке О и радиусом r, вписанная в треугольник АВС;
|OM| = **|ON|** = **|OT|** = ***r***
Найти:
S_{ABC}
Доказательство:

Площадь треугольника **ABC** численно равна сумме площадей треугольников **AOB**, **BOC** и **COA** для которых стороны ***c***, ***a*** и ***b*** являются основаниями, а отрезки **ON**, **OT** и **OM** высотами соответственно. Для каждого из указанных выше треугольников применив формулу $S = \frac{1}{2} \cdot ah$ получаем:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{1}{2} \cdot cr + \frac{1}{2} \cdot ar + \frac{1}{2} \cdot br = \frac{c+a+b}{2} \cdot r = p \cdot r.$$

Таким образом получаем, что радиус вписанной в треугольник окружности равен $r = {}^{S}/_{p}$. Если считать, что формула Герона уже выведена, то можно записать формулу, выражающую радиус вписанной в треугольник окружности через стороны этого треугольника:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Лемма 2. Площадь треугольника равна

$$\boldsymbol{S = (p-a) \cdot r_a} \qquad \textbf{(5)}$$

где r_a – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны ВС треугольника.

Доказательство:

Пусть J_a — центр вневписанной окружности, касающийся отрезка **BC** — стороны ***a*** треугольника. В каждом из треугольников $\mathbf{ABJ_a}$, $\mathbf{BCJ_a}$, $\mathbf{CAJ_a}$ высота, опущенная из J_a, равна r_a. Площадь треугольника **ABC** численно равна сумме площадей треугольников $\mathbf{ABJ_a}$ и $\mathbf{CAJ_a}$ минус площадь треугольника $\mathbf{BCJ_a}$.

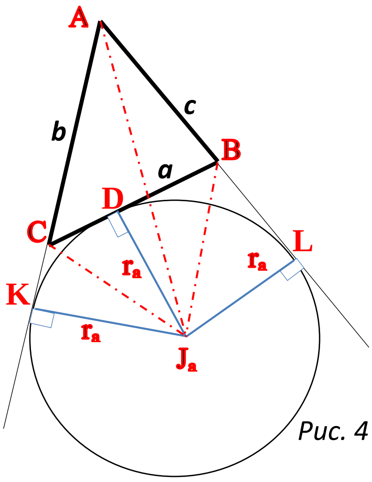

Рис. 4

Имеем

$$S_{ABC} = S_{ABJ_a} + S_{CAJ_a} - S_{BCJ_a} = \frac{1}{2} \cdot cr_a + \frac{1}{2} \cdot br_a - \frac{1}{2} \cdot ar_a =$$
$$= \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = (p-a) \cdot r_a$$

Таким образом радиус вневписанной окружности касающийся стороны ***a*** треугольника равен:

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

А через стороны треугольника он выражается формулой:

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$ (снова считаем, что формула Герона уже известна).

Если теперь обозначить через r_b и r_c радиусы вневписанных окружностей касающихся соответственно сторон **AC** и **AB** треугольника **ABC**, то можно доказать, что

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

В самом деле, т.к

$$r_a=\frac{S}{p-a},\qquad r_b=\frac{S}{p-b},\qquad r_c=\frac{S}{p-c},$$

то

$$\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S},\quad \frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S},\quad \frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S}.$$

Складывая эти формулы получим:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

что и требовалось доказать.

Проведем следующую физическую аналогию. Если взять три резистора сопротивления которых численно равны радиусам вневписанных окружностей и соединить их параллельно, то их суммарное сопротивление численно равно радиусу вписанной окружности.

Утверждение 1. Длина отрезка **AK** (см. рис. 4) равна полупериметру **p**.

Действительно, отрезки **AK** и **AL** равны, как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки **A**. Отрезки **CD** и **CK** равны, как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки **C**. Отрезки **BD** и **BL** равны, как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки **B**. Отсюда получаем:

AK + AL = AC +CK+AB+BL = AC+CD+AB+BD = b + c + (CD + DB) = b + c + a = 2p ⇒
⇒ AK = AL = p

Утверждение 2. Длина отрезка **CK** (см. рис. 4) равна **p - b**.

CK = AK – AC = p - b

Утверждение 3. Длина отрезка **CM** (см. рис. 3) равна **p - c**.
Действительно,

CM + AM = b, AN + BN = c, BT + CT = a.

CM = CT, AM = AN, BN = BT – как отрезки касательных проведенных из одной точки.
получаем:

CM = *b* – AM = *b* – AN = *b* – (*c* – BN) = *b* – (*c* – BT) =
= *b* – (c – (*a* – CT)) = *b* – (*c* – (*a* – CM)) = *b* – *c* + (*a* – CM) =
= *b* – *c* + *a* – CM
2CM = *a* + *b* + *c* – *2c*
2CM = *2p* – *2c*
CM = *p* – *c*

Совершенно аналогично можно найти длины отрезков **AM** и **BN**, но мы поступим иначе.

$$AM=b-CM=b-(p-c)=b-p+c=b+c-p=b+c-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=$$
$$=\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-a=p-a=AN.$$

И, соответственно, **BN = BT = *p* – *b***

Лемма 3. Радиусы вписанной и вневписанной окружностей связаны соотношением:

$$r \cdot r_a = (p - b) \cdot (p - c) \quad \textbf{(6)}$$

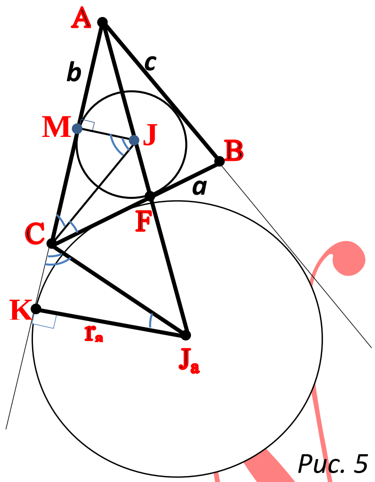

Рис. 5

Рассмотрим два прямоугольных треугольника **CMJ** и **CKJ$_a$**.

В первом из них угол при вершине **C** равен $\theta = \gamma/2 = C/2$, т.к. **CJ** – биссектриса угла **C**. Следовательно угол при вершине **J** равен 90° - θ.

Угол **BCK** равен **180°** - **C** (как дополнение угла **C** до развернутого – смежные углы). Окружность **J$_a$r$_a$** вписана и в угол **BCK**, следовательно **CJ$_a$** – биссектриса этого угла. Поэтому угол **J$_a$CK** равен половине угла **BCK** и равен (180° - C)/2 = 90°-θ = $\angle$ **CJM** треугольника **CMJ**.

Таким образом прямоугольные треугольники **CMJ** и **CKJ$_a$** подобны, поскольку у них углы при вершинах **J** и **C** соответственно равны. Из подобия получаем:

$$\frac{CM}{MJ} = \frac{KJ_a}{CK} \quad \text{или} \quad \frac{p-c}{r} = \frac{r_a}{p-b}$$

откуда

$$rr_a = (p-b)(p-c).$$

Теперь перейдем непосредственно к выводу формулы Герона. Выпишем формулы (4) – (6) доказанные в леммах 1 – 3.

$$S = p \cdot r, \qquad S = (p-a) \cdot r_a, \qquad rr_a = (p-b)(p-c).$$

Перемножая первые два равенства получаем:

$$S^2 = p(p-a)rr_a \qquad \textbf{(7)}$$

Подставляя сюда значение r·r$_a$ находим:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

4-й и 5-й способы:

Часто в литературе можно встретить такие способы доказательства формулы Герона.

Т.к. **S** = ***p·r*** (Лемма 1), то подставляя сюда выражение радиуса вписанной окружности через стороны треугольника находим требуемое:

$$S = p \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

И аналогично: т.к. $S = (p-a) \cdot r_a$ (Лемма 2) то

$$S = (p-a) \cdot \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

При таких способах доказательства необходимо потребовать, чтобы выражения для r и r_a через стороны треугольника были бы получены без использования формулы Герона. Мы же, пока, эти способы использовать не можем, т.к. получили формулы для r и r_a наиболее простым способом, считая формулу Герона уже доказанной.

Покажем, как можно выразить r и **r$_a$** через стороны треугольника не используя формулу Герона.

Выше уже было показано, что

$$1 - \cos\alpha = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}, \qquad 1 + \cos\alpha = \frac{2(p-a)p}{bc} \text{ (2-й способ)}$$

и найдены длины отрезков **AK** = ***p*** (Утверждение 1) и **AM = *(p – a)*** (Утверждение 3).

Заметим, что

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,.$$

Откуда

$$sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\qquad cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$ и

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{(p-a)p}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\,.$$

Рассмотрим теперь два подобных прямоугольных треугольника **AJM** и **AJ_aK** (см. рис. 5) угол при вершине **A** у которых равен ***α/2*** т.к. **AJ_a** – биссектриса треугольника **ABC**. Из них непосредственно получаем:

$$\mathbf{r}=|\mathbf{AM}|\cdot\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=(p-a)\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

и

$$\mathbf{r_a}=|\mathbf{AK}|\cdot\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=p\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}}\,.$$

Теперь 4-й и 5-й способы становятся правомочными.

Кроме того, зная выражение для **r** и **r_a** через стороны треугольника, при доказательстве формулы Герона 3-м способом можно не доказывать Лемму 3, а подставить в формулу (7) непосредственно сами значения **r** и **r_a**.

Снова вернемся к рис. 5. Найдем длины отрезков **AJ** и **AJ_a**. Из прямоугольных треугольников **AJM** и **AJ_aK** соответственно имеем

$$AJ=\frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot\sqrt{bc}}{\sqrt{p}\cdot\sqrt{2(p-b)(p-c)}}=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$ **и**

$$\mathbf{AJ_a}=\frac{r_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{p(p-b)(p-c)}\cdot\sqrt{bc}}{\sqrt{p-a}\cdot(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}\,.$$

Теперь найдем длину отрезка **JF** (см. рис. 5). Для этого вспомним что, *биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника* и введем обозначения:

AJ = *m*, **JF = *n*,** **AF = AJ + JF = β_a,** **CF = *u*,** **BF = *v*.**

Тогда из треугольника **ABC**, учитывая что **AF** биссектриса получаем:

$$\left[\begin{aligned}&\frac{b}{c}=\frac{u}{v}\\&u+v=a\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&u=v\frac{b}{c}\\&v\frac{b}{c}+v=a\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&u=v\frac{b}{c}\\&vb+vc=ac\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&u=v\frac{b}{c}\\&v=\frac{ac}{b+c}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&u=\frac{ab}{b+c}\\&v=\frac{ac}{b+c}\end{aligned}\right.$$

Рассмотрим теперь треугольник **AFB**. Проведем в нем биссектрису угла **B** (на рис. 5 она не показана). Указанная биссектриса пройдет через точку **J** т. к. является и биссектрисой треугольника **ABC**, а все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, она разделит сторону **AF** треугольника **AFB** в отношении ***n/m* = *v/c***. Отсюда, подставляя найденные значения ***m*** и ***v***, получаем:

$$JF=n=m\frac{v}{c}=\frac{mac}{c(b+c)}=\frac{ma}{b+c}=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}\cdot\frac{a}{(b+c)}=\frac{a\sqrt{bc(p-a)}}{(b+c)\sqrt{p}}$$

Складывая найденные значения длин отрезков **AJ** и **JF** находим

$$AF=\beta_a=\frac{\sqrt{bc(p-a)}}{\sqrt{p}}+\frac{a\sqrt{bc(p-a)}}{(b+c)\sqrt{p}}=\frac{(b+c)\sqrt{bc(p-a)}+a\sqrt{bc(p-a)}}{(b+c)\sqrt{p}}=\frac{(a+b+c)\sqrt{bc(p-a)}}{(b+c)\sqrt{p}}=\frac{2p\sqrt{bc(p-a)}}{(b+c)\sqrt{p}}=$$

$$=\frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{pbc(p-a)}$$

Если в последнюю формулу подставить значение ***p*** получим:

$$\beta_a=\frac{\sqrt{bc(b^2+c^2-a^2+2bc)}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}}{b+c}$$

Осталось найти длины отрезков $\mathbf{CJ_a}$ и $\mathbf{BJ_a}$ это легко сделать из прямоугольных треугольников $\mathbf{CKJ_a}$ и $\mathbf{BLJ_a}$ учитывая, что угол при вершине $\mathbf{J_a}$ равен $\gamma/2$ и $\beta/2$ соответственно (см. рис. 4 и 5).

$$CJ_a = \frac{CK}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{(p-a)\sqrt{ab}}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} = \sqrt{\frac{ab(p-a)}{p-b}} \quad \text{и} \quad BJ_a = \frac{BL}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{(p-c)\sqrt{ac}}{\sqrt{(p-a)(p-c)}} = \sqrt{\frac{ac(p-c)}{p-a}}$$

Таким образом при доказательстве формулы Герона мы выразили через стороны треугольника не только его площадь, но и

1) *длины высот треугольника;*
2) *длины биссектрис треугольника;*
3) *радиус вписанной окружности;*
4) *радиусы вневписанных окружностей;*
5) *длины отрезков соединяющих вершины треугольника с центром вписанной окружности;*
6) *длины отрезков соединяющих вершины треугольника с центром вневписанных окружностей;*
7) *длины отрезков касательных проведенных из вершин треугольника к вписанной окружности;*
8) *длины отрезков касательных проведенных из вершин треугольника к вневписанным окружностям;*
9) *синусы и косинусы (а значит и тангенсы и котангенсы) всех углов треугольника;*
10) *синусы и косинусы* $\alpha/2$, $\beta/2$ *и* $\gamma/2$*;*
11) *Доказали несколько полезных формул и соотношений.*

В заключение докажем еще одну формулу, которую часто неправильно называют формулой Герона для четырехугольников. На самом деле эта формула носит имя индийского математика Брахмагупты. По этой формуле можно найти площадь любого четырехугольника вокруг которого может быть описана окружность. Другими словами, если сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180°.

Формула Брахмагупты.

Теорема: Площадь четырехугольника, вписанного в окружность, находится по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,,$$

где a, b, c и d стороны четырехугольника, а $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ — его полупериметр.

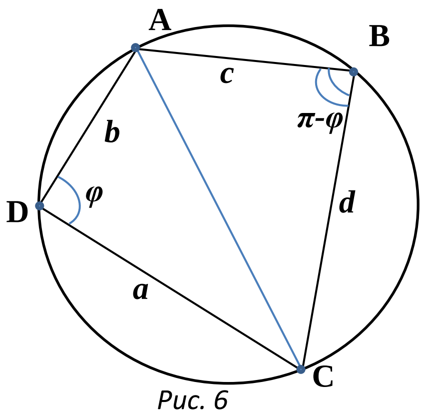

Рис. 6

Доказательство:

Обозначим угол **D** четырехугольника **ABCD** буквой **φ**. Тогда угол **B** будет равен **π-φ**, т.к. сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°. По этой причине

$$S = S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{2}cd\sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{2}cd\sin\varphi = \\ = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\varphi$$

Следовательно,

$$S^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)^2\sin^2\varphi = \frac{1}{4}(ab+cd)^2(1-\cos^2\varphi)$$

Применяя теорему косинусов к треугольнику **ACD**, получаем:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

Применяя теорему косинусов к треугольнику **ABC**, получаем:

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi-\varphi) = c^2 + d^2 + \cos\varphi$$

Следовательно,

$$\mathbf{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2 + d^2 + 2cd\cos\varphi \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos\varphi \ \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

Поэтому

$$S^2 = \frac{1}{4}(ab + cd)^2 \cdot (1 - \cos^2\varphi) = \frac{1}{4}(ab + cd)^2\left[1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(ab + cd)^2\left[1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}\right] = \frac{1}{4}\left[(ab + cd)^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{16}[4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2] =$$

$$= \frac{1}{16}(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) =$$

$$= \frac{1}{16}[(a + b)^2 - (c - d)^2] \cdot [(c + d)^2 - (a - b)^2] =$$

$$= \frac{1}{16}(a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) =$$

$$= \frac{1}{16}(a + b + c + d - 2d)(a + b + c + d - 2c)(a + b + c + d - 2b)(a + b + c + d - 2a) =$$

$$= \frac{1}{16}(2p - 2d)(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a) = (p - d)(p - c)(p - b)(p - a).$$

Таким образом,

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

Что и требовалось доказать.

Возникает вопрос: а не годиться ли формула Брахмагупты для любого четырехугольника?

Для того, чтобы доказать теорему необходимо рассмотреть все возможные варианты и показать, что теорема верна во всех случаях. Для того, чтобы опровергнуть любое утверждение достаточно привести хотя бы один пример для которого это утверждение неверно. Поступим так и в этом случае.

Рассмотрим ромб, не являющийся квадратом, со стороной равной $\boldsymbol{a}$. Применяя к нему формулу получаем

$$p = (a + a + a + a)/2 = 2a$$

$$S = \sqrt{(p - a)(p - a)(p - a)(p - a)} = \sqrt{a^4} = a^2$$

что площадь ромба со стороной $\boldsymbol{a}$ равна площади квадрата со стороной $\boldsymbol{a}$. Но, как известно, площадь ромба равна $\mathbf{S = a^2 \sin\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ любой из его углов. И наше утверждение оказалось ложным.

Таким образом формула Брахмагупты применима только к квадрату, прямоугольнику, равнобочной трапеции и к произвольному четырехугольнику у которого сумма противоположных углов равна 180°.

Кошавкин Сергей Геннадьевич.