Треугольники

1. Определение треугольника.

Определение 1. *Часть плоскости, ограниченная тремя прямыми, каждая из которых пересекает две другие, называется треугольником.*

Точки пересечения этих прямых называются вершинами треугольника. Отрезки, соединяющие эти точки, называются сторонами треугольника.

Определение 1а. *Многоугольник, имеющий три стороны (три угла) называется треугольником.*

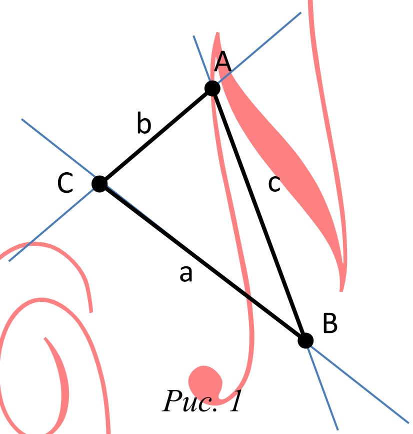


Рис. 1

Оба приведенных определения эквивалентны. Вершины треугольника принято обозначать заглавными латинскими буквами, а стороны строчными. Причем, против вершины **A** лежит сторона $\boldsymbol{a}$, против вершины **B** – сторона $\boldsymbol{b}$ и против вершины **C** – сторона $\boldsymbol{c}$ треугольника. Иногда стороны треугольника обозначаются как соответствующие отрезки: **AB** = $\boldsymbol{c}$, **BC** = $\boldsymbol{a}$… Когда требуется подчеркнуть, что речь идет о длине стороны треугольника, то используют скобки: **|AB|, |AC|** и **|BC|**. Сам треугольник в этом случае называется треугольником **ABC** и обозначается Δ**ABC**. См. рис. 1. Углы треугольника обозначаются, как и вершины, **A**, **B** и **C** или буквами греческого алфавита $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Или тремя буквами: **CAB = BAC = A, ACB = BCA =** $\boldsymbol{\gamma}$ и т. д. В этом случае средняя буква указывает вершину угла о котором идет речь. Если требуется просто указать угол, то перед буквами иногда ставиться значок "∠". Например, $\angle \mathbf{ABC} = \boldsymbol{\beta}$. Когда говорят именно о величине угла, то над буквами ставят "шапочку" $\widehat{ABC} = \widehat{B} = 30°$. Использование указанных знаков ||, ∠ и "шапочки" не является обязательным, если по ходу задачи понятно о чем идет разговор.

Для ***любого треугольника*** всегда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a + b > c,} & \mathbf{a + c > b,} & \mathbf{b + c > a} \\ \mathbf{a > c - b,} & \mathbf{c > b - a,} & \mathbf{b > a - c} \end{array} \qquad \mathbf{(1)}$$

т. е. сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины его третьей стороны и любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон. Эти утверждения следует из того, что кратчайшее расстояние между двумя точками — это отрезок соединяющий эти точки. Неравенства **(1)** называют неравенствами треугольника.

2. Типы треугольников.

В зависимости от величин углов треугольники делятся на три типа:

1. **Остроугольный** – треугольник, у которого все углы острые (См. рис. 2);
2. **Прямоугольный** – треугольник, у которого один из углов прямой (См. рис. 3);
3. **Тупоугольный** – треугольник, у которого один из углов тупой (См. рис. 4).

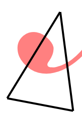


Рис. 2

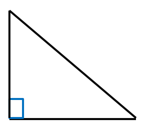


Рис. 3

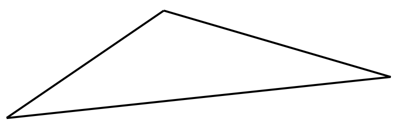


Рис. 4

Большая сторона прямоугольного треугольника лежащая против прямого угла называется ***гипотенузой***, а две другие — ***катетами***. При обозначении прямоугольного треугольника вершину прямого угла принято обозначать буквой **С**. Соответственно гипотенузу обозначают буквой ***с***.

В зависимости от длин сторон треугольники делятся на три типа:

1. **Равносторонний** – треугольник, у которого все стороны равны (См. рис. 5);
2. **Равнобедренный** – треугольник, у которого две стороны равны (См. рис. 6).
3. **Произвольный** – нет равенства ни между сторон, ни между углов.

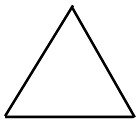


Рис. 5

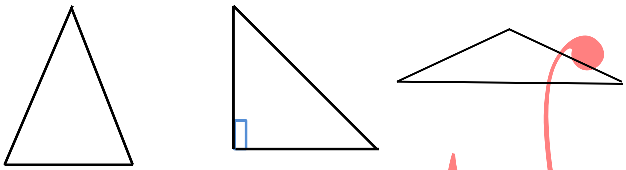


Рис. 6

Равносторонний треугольник еще называют ***правильным***. У него равны не только длины сторон, но и, как будет показано ниже (см. теорему 15 (синусов) и теорему 16), все углы равны 60°. Равносторонним может быть только остроугольный треугольник. Равнобедренным могут быть как остроугольный, так и прямоугольный и тупоугольный треугольники (см. рис. 6). В равнобедренном треугольнике равные стороны называются *боковыми сторонами* треугольника или бедрами треугольника. Третья сторона называется *основанием* треугольника. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Это также следует из теорем 15 (синусов) и 16. Иногда, когда требуется как-то выделить одну из сторон треугольника, ее называют *основанием* треугольника. Две другие стороны при этом, соответственно, называются *боковыми* сторонами треугольника.

3. Признаки равенства треугольников.

Напомним, что определение равных фигур дано нами в главе **Движение**.

Теорема 1: (первый признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Рис. 7

<u>Доказательство</u>: Пусть в этих треугольниках равны стороны $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A_1B_1}| = \boldsymbol{c}$ и $|\mathbf{AC}| = |\mathbf{A_1C_1}| = \boldsymbol{b}$, а угол $\angle\mathbf{BAC} = \angle\mathbf{B_1A_1C_1} = \boldsymbol{\alpha}$.

Тогда треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ можно наложить на треугольник **ABC** так, чтобы угол $\mathbf{B_1A_1C_1}$ совпал с углом **BAC**. При этом можно расположить треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ так, чтобы сторона $\mathbf{A_1B_1}$ совпала со стороной **AB**, а сторона $\mathbf{A_1C_1}$ — со стороной **AC**. Тогда треугольники совпадут полностью, поскольку совпадут все их вершины. **Q.E.D**[1]**.**

(В случае необходимости вместо треугольника $\mathbf{A_1B_1C_1}$ можно рассматривать равный ему "перевернутый" треугольник, т. е. треугольник, симметричный $\mathbf{A_1B_1C_1}$ относительно произвольной прямой .) **Q.E.D.**

Теорема 2: (второй признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

[1] *Quod erat demonstrandum – что и требовалось доказать.*

<u>Доказательство:</u> Пусть в треугольниках **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$имеют место равенства $|\mathbf{BC}|$ = $|\mathbf{B_1C_1}|$ = $\boldsymbol{a}$ и $\angle$**ABC** = $\angle\mathbf{A_1B_1C1}$= $\boldsymbol{\beta}$, $\angle$**ACB** = $\angle\mathbf{A_1C_1B_1}$= $\boldsymbol{\gamma}$.

Рис. 8

Поступим так же, как и в предыдущем случае. Наложим треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ на треугольник **ABC** так, чтобы совпали стороны **BC** и $\mathbf{B_1C_1}$ и прилегающие к ним углы. Тогда треугольники совпадут полностью. Значит, они равны. Как и в предыдущем случае, при необходимости треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ можно "перевернуть обратной стороной". **Q.E.D.**

Теорема 3: (третий признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Рис. 9

<u>Доказательство:</u> Пусть для треугольников **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$ имеют место равенства **AB** = $\mathbf{A_1B_1}$ = $\boldsymbol{c}$, **BC** = $\mathbf{B_1C_1}$ = $\boldsymbol{a}$, **CA** = $\mathbf{C_1A_1}$ = $\boldsymbol{b}$. Перенесем треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ так, чтобы сторона $\mathbf{A_1B_1}$ совпала со стороной **AB**, при этом должны совпасть вершины $\mathbf{A_1}$ и **A**, $\mathbf{B_1}$ и **B**. Рассмотрим две окружности с центрами в **A** и **B** и радиусами соответственно **AC** = $\boldsymbol{b}$ и **BC** = $\boldsymbol{a}$. Эти окружности пересекаются в двух симметричных относительно **AB** точках: **C** и $\mathbf{C_2}$. Значит, точка $\mathbf{C_1}$ после переноса указанным образом треугольника должна совпасть либо с точкой **C**, либо с точкой $\mathbf{C_2}$. В обоих случаях это будет означать равенство треугольников **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$, поскольку треугольники **ABC** и $\mathbf{ABC_2}$ равны (эти треугольники симметричны относительно прямой **AB**.) **Q.E.D.**

Из признаков равенства для произвольных треугольников легко вывести признаки равенства для прямоугольных треугольников.

	Признаки равенства прямоугольных треугольников	Из какого признака следует
1	по катету и гипотенузе	по трем сторонам
2	по двум катетам	по двум сторонами углу между ними
3	по катету и острому углу	
4	по гипотенузе и острому углу	

Предоставляем проделать эту работу нашим читателям.

4. Признаки подобия треугольников.

Определение 2: *Подобными называются треугольники, у которых сходственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны:* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a_1}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b_1}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c_1}} = \boldsymbol{k}$, *где* $\boldsymbol{k}$ *– коэффициент подобия.*

Теорема 4: (первый признак подобия треугольников). *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

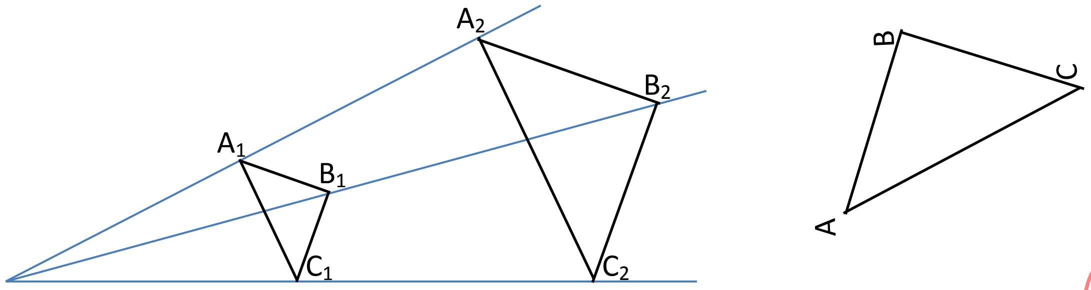


Рис. 10

Доказательство: Пусть даны два треугольника **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$ и пусть $\angle\mathbf{A} = \angle\mathbf{A_1}$ и $\angle\mathbf{B} = \angle\mathbf{B_1}$. Положим $|\mathbf{BC}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{B_1C_1}|$. Переведем треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ гомотетией $\boldsymbol{f}$ с любым центром и коэффициентом $\boldsymbol{k}$ в треугольник $\mathbf{A_2B_2C_2}$. Треугольники **ABC** и $\mathbf{A_2B_2C_2}$ равны по второму признаку равенства треугольников (теорема 2). Действительно, при гомотетии углы сохраняются $\angle\mathbf{A_1} = \angle\mathbf{A_2} = \angle\mathbf{A}$ и $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B$. Кроме того $\mathbf{B_2C_2} = \boldsymbol{k}\mathbf{B_1C_1} = \mathbf{BC}$. По теореме П.1. существует движение $\boldsymbol{g}$, переводящее $\Delta\mathbf{A_2B_2C_2}$ в $\Delta\mathbf{ABC}$. Выполнив сначала гомотетию $\boldsymbol{f}$, а затем движение $\boldsymbol{g}$, мы осуществим подобие $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, которое переводит треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ в треугольник **ABC**. Следовательно, $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1} \sim \Delta\mathbf{ABC}$. **Q.E.D.**

Теорема 5: (второй признак подобия треугольников). *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.*

Доказательство: Пусть даны два треугольника **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$ и пусть $\angle\mathbf{C} = \angle\mathbf{C_1}$. Положим $|\mathbf{AC}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{A_1C_1}|$ и $|\mathbf{BC}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{B_1C_1}|$. Переведем треугольника $\mathbf{A_1B_1C_1}$ гомотетией $\boldsymbol{f}$ с любым центром и коэффициентом $\boldsymbol{k}$ в треугольник $\mathbf{A_2B_2C_2}$. Треугольники **ABC** и $\mathbf{A_2B_2C_2}$ равны по первому признаку равенства треугольников (теорема 1). В самом деле, при гомотетии углы сохраняются $\angle\mathbf{C_1} = \angle\mathbf{C_2} = \angle\mathbf{C}$. Кроме того $\mathbf{B_2C_2} = \boldsymbol{k}\mathbf{B_1C_1} = \mathbf{BC}$ и $|\mathbf{A_2C_2}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{A_1C_1}| = |\mathbf{AC}|$. По теореме П.1. существует движение $\boldsymbol{g}$, переводящее $\Delta\mathbf{A_2B_2C_2}$ в $\Delta\mathbf{ABC}$. Выполнив сначала гомотетию $\boldsymbol{f}$, а затем движение $\boldsymbol{g}$, мы осуществим подобие $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, которое переводит треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ в треугольник **ABC**. Следовательно, $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1} \sim \Delta\mathbf{ABC}$. **Q.E.D.**

Теорема 6: (третий признак подобия треугольников). *Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Доказательство: Пусть для треугольников **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$ выполняется $|\mathbf{AC}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{A_1C_1}|$, $|\mathbf{BC}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{B_1C_1}|$ и $|\mathbf{AB}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{A_1B_1}|$. Переведем треугольника $\mathbf{A_1B_1C_1}$ гомотетией $\boldsymbol{f}$ с любым центром и коэффициентом $\boldsymbol{k}$ в треугольник $\mathbf{A_2B_2C_2}$. Треугольники **ABC** и $\mathbf{A_2B_2C_2}$ равны по третьему признаку равенства треугольников (теорема 3). В самом деле, $|\mathbf{A_2C_2}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{A_1C_1}| = |\mathbf{AC}|$, $|\mathbf{B_2C_2}| = k|\mathbf{B_1C_1}| = |\mathbf{BC}|$ и $|\mathbf{A_2B_2}| = \boldsymbol{k}|\mathbf{A_1B_1}| = |\mathbf{AB}|$. По теореме П.1. существует движение $\boldsymbol{g}$, переводящее $\Delta\mathbf{A_2B_2C_2}$ в $\Delta\mathbf{ABC}$. Выполнив сначала гомотетию $\boldsymbol{f}$, а затем движение $\boldsymbol{g}$, мы осуществим подобие $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, которое переводит треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ в треугольник **ABC**. Следовательно, $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1} \sim \Delta\mathbf{ABC}$. **Q.E.D.**

Для прямоугольных треугольников справедливы следующие три признака подобия:

Теорема 4а: (первый признак подобия прямоугольных треугольников – по острому углу). *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.*

В самом деле, если равна пара острых углов, да еще равны прямые углы, то мы сразу же получаем первый признак подобия треугольников.

Теорема 5а: (второй признак подобия прямоугольных треугольников – по двум катетам). *Если два катета одного прямоугольного треугольника пропорциональны двум* *катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.*

Действительно, имеем два катета и прямой угол между ними – второй признак подобия треугольников**.**

Теорема 6а: (третий признак подобия прямоугольных треугольников – по катету и гипотенузе). *Если один из катетов и гипотенуза одного прямоугольного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе второго прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.*

Теорема Пифагора (См. пункт 8) дает для второго катета однозначное решение: $\boldsymbol{b^2} =$ $= \boldsymbol{c^2} - \boldsymbol{a^2}$ и мы получаем третий признак подобия треугольников – по трем сторонам.

Теорема 7. *Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.*

<u>Доказательство:</u> Как будет показано в пункте 9 площадь треугольника может быть найдена по формуле: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma}$. Пусть теперь даны два подобных треугольника стороны которых связаны отношением $\boldsymbol{a = ka_1}$ и $\boldsymbol{b = kb_1}$. Тогда для площадей треугольников соответственно имеем: $\boldsymbol{S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin\gamma}$

и $$\boldsymbol{S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ka_1 kb_1 \sin\gamma = \frac{1}{2} k^2 a_1 b_1 \sin\gamma}$$

Окончательно получаем:

$$\boldsymbol{\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2}$$ **Q.E.D.**

Теорема 8*. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от этого треугольника подобный треугольник.*

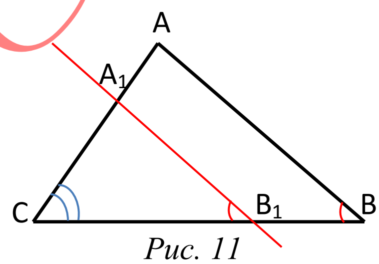


Рис. 11

<u>Доказательство:</u> Треугольники **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C}$ подобны по первому признаку (угол **C** у них общий, а углы **B** и $\mathbf{B_1}$ равны как соответственные).

Кроме того доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы Фалеса.

5. Углы треугольника.

Теорема 9: *Сумма углов любого треугольника равна 180°.*

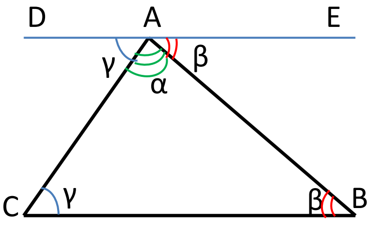


Рис. 12

<u>Доказательство:</u> Проведем, например, через вершину **A** произвольного треугольника **ABC** прямую **DE**, параллельную прямой **CB**, и рассмотрим полученные углы с вершиной в точке **A** (рис. 12).

Углы **DAC** и **ACB** равны как внутренние накрест лежащие. По той же причине равны углы **EAB** и **CBA**. Поскольку углы **DAC**, **CAB** и **BAE** в сумме составляют развёрнутый угол, то и сумма углов треугольника **ABC** равна 180°. **Q.E.D.**

Определение 3: *Угол, смежный внутреннему углу треугольника относительно одной из его сторон, называется внешним углом треугольника.*

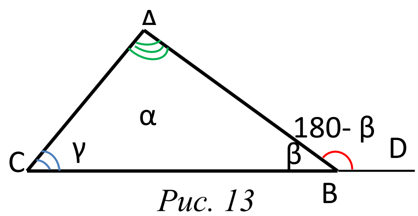


Рис. 13

Теорема 10: *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.* См. рис. 13.

$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = 180° - \beta = ABD}.$$ **Q.E.D.**

Теорема 10 является следствием теоремы 9.

Таким образом, если нам известно два внутренних угла треугольника, то мы знаем и третий внутренний угол, а с ним и все шесть его внешних углов.

Если нам известен один из внешних углов треугольника и любой из двух внутренних, не смежных с ним, то легко находим все прочие углы треугольника.

Для прямоугольного треугольника достаточно знать один из его острых углов.

6. Площадь треугольника.

Определение 4: *Высотой треугольника называют перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение.*

Высоту треугольника принято обозначать буквой $\boldsymbol{h}$ или $\boldsymbol{h_a}$, $\boldsymbol{h_b}$, $\boldsymbol{h_c}$ если требуется подчеркнуть из какой вершины опущена высота. Сторону, на которую опущена высота, в этом случае называют основанием треугольника.

Теорема 11: *Площадь треугольника равна произведению половины основания на высоту.*

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot a h_a} \qquad (2)$$

Доказательство: Рассмотрим два произвольных равных треугольника **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$ у которого точка **A** совмещена с точкой $\mathbf{A_1}$, точка **B** с точкой $\mathbf{B_1}$ и **C** – с точкой $\mathbf{C_1}$. (На

а) *Рис. 14* *б)*

рис. 14а они для наглядности смещены). Повернем и переместим треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ таким образом, чтобы точка $\mathbf{B_1}$ совпала бы с точкой **A**, а точка $\mathbf{A_1}$ с точкой **B** (См. рис. 14б). В этом случае и отрезки **AB** и $\mathbf{B_1A_1}$ совпадут, т. к. они равны по условию. Получившийся четырехугольник $\mathbf{AC_1BC}$ будем параллелограммом (Почему?) построенным из двух ***равных*** треугольников **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$. Площадь параллелограмма находится по формуле $\boldsymbol{S = ah}$. Значит площадь каждого из данных треугольников будет равна $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot a h_a}$. **Q.E.D.**

7. Решение прямоугольного треугольника.

Пусть дан произвольный прямоугольный треугольник **ABC** (см. рис.15). Из него получаем:

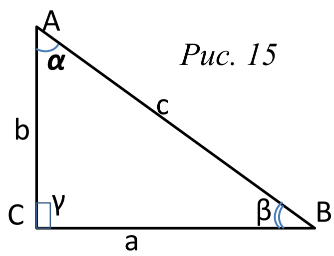


Рис. 15

1. Отношение противолежащего катета к гипотенузе называется *синусом* угла

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \sin\alpha} \qquad \text{и}$$

$$\boldsymbol{\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \sin\beta}$$

2. Отношение прилежащего катета к гипотенузе называется косинусом угла

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \cos\alpha \ \ \text{и}$$

$$\cos\beta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \cos\beta$$

3. Отношение противолежащего катета к прилежащему называется тангенсом угла

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = b\operatorname{tg}\alpha \qquad \text{и}$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a\operatorname{tg}\beta$$

4. Отношение прилежащего катета к противолежащему называется котангенсом угла

$$\boldsymbol{ctg\,\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a\,ctg\,\alpha} \qquad \text{и}$$
$$\boldsymbol{ctg\,\beta = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a = b\,ctg\,\beta}$$

Нетрудно видеть, что в прямоугольном треугольнике $\boldsymbol{sin\alpha = cos\beta}$, $\boldsymbol{cos\alpha = sin\beta}$, $\boldsymbol{tg\alpha = ctg\beta}$ и $\boldsymbol{ctg\alpha = tg\beta}$.

Кроме того заметим, что $\boldsymbol{a^2 = c^2 \cdot sin^2\alpha}$ и $\boldsymbol{b^2 = c^2 \cdot cos^2\alpha}$. Складывая два последних равенства и учитывая, что

$$\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1} \qquad \textbf{(3)}$$

получаем $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ — теорему Пифагора. Однако использовать такое доказательство теоремы Пифагора надо осторожно, ибо в тригонометрии формула **(3)** обычно выводится из теоремы Пифагора. Используя данный вывод теоремы надо быть готовым к тому, что формулу **(3)** мы будем выводить иным способом.

8. Теорема Пифагора и теорема косинусов.

Теорема 12: *Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.*

Доказательство: Пусть дан прямоугольный треугольник **ABC**. Построим на его сторонах вектора (см. рис. 16) и запишем векторное равенство:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

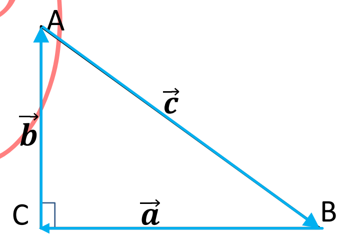


Рис. 16

Возведем обе части равенства в квадрат.

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{c}^2$$
$$\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$$

Учитывая, что квадрат вектора это скаляр равный модулю вектора в квадрате и применяя формулу скалярного умножения векторов к произведению $\vec{a}\vec{b}$ получим:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot cos(180° - \gamma) = c^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot cos\,\gamma = c^2}$$

Т. к. $cos\gamma = cos90° = 0$ то окончательно получаем: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ **Q.E.D.**

Теорема 13 (теорема косинусов): *Сторона треугольника выражается через две другие его стороны и угол между ними формулой*

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Другими словами: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство: Доказательство теоремы 13 совершенно аналогично предыдущему. Надо только учитывать, что угол между векторами равен не $\boldsymbol{\gamma}$, а **180° -** $\boldsymbol{\gamma}$ (внешний угол треугольника при вершине **C**), что $\boldsymbol{cos\,(180° - \gamma) = -cos\gamma}$ и что теперь $\boldsymbol{cos\gamma \neq 0}$. Сразу получаем требуемое.

Для тех наших читателей, кто не знаком с правилами действия над векторами в пункте 13 приведены другие доказательства теоремы Пифагора и теоремы косинусов.

9. Площадь треугольника. Теорема синусов.

Теорема 14: *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.*

Доказательство: Пусть дан треугольник **ABC** в котором известны стороны $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и угол $\boldsymbol{\alpha}$ между ними. Покажем, что

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha. \qquad \textbf{(4)}$$

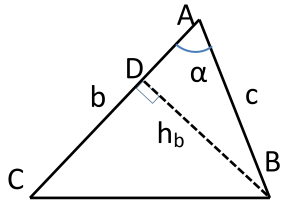


Рис. 17

Проведем в нем высоту $\boldsymbol{h_b}$ = **BD** (или $\boldsymbol{h_c}$ = **CM** (на рис. 17 она не показана)) и рассмотрим прямоугольный треугольник **ADB** (**AMC**). Из этого треугольника следует $\boldsymbol{h_b = c \cdot \sin\alpha}$ ($\boldsymbol{h_c = b \cdot \sin\alpha}$). Тогда, согласно теореме 11, получаем:

$$S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \quad \left(S = \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{2} bc \sin\alpha\right).$$

Теорема 14 дает нам три формулы для нахождения площади треугольника

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2} ac \sin\beta, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \qquad \textbf{(4a)}$$

из которых следует: $\boldsymbol{ab \sin\gamma = ac \sin\beta = bc \sin\alpha}$

Из последних формул легко получаем:

Теорема 15 (теорема синусов): *Для любого треугольника справедливо следующее соотношение между его сторонами и противолежащими этим сторонам углами:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad (\textbf{5})$$

Формулы (5) называют ***теоремой синусов***. Мы ее получили как следствие из теоремы 14. Откуда в формулах (5) взялось выражение **2R** мы поясним ниже в пункте 12.3.1.

В свою очередь из теоремы синусов следует следующая теорема:

Теорема 16: *В треугольнике, против большей стороны лежит больший угол.*

Из теоремы синусов следует, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Из теоремы синусов и теоремы 9 следует, что в равностороннем треугольнике все углы равны и равны **180°/3 = 60°**.

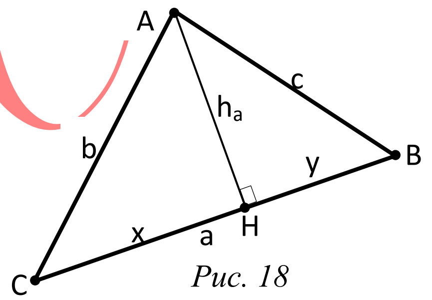


Рис. 18

10. Формула Герона.

Теорема 17: *Площадь треугольника, длины сторон которого равны* $\boldsymbol{a, b}$ *и* $\boldsymbol{c}$, *находится по формуле:*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \textbf{(6)},$$

где $\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}}$ *— полупериметр треугольника.*

Доказательство: Рассмотрим треугольник **ABC** где $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$

Пусть **|AH|** = $\boldsymbol{h_a}$ — высота треугольника **ABC**, проведенная из вершины **A**.

Обозначим $|CH| = x$, $|BH| = y$. Тогда $a = x + y$, и по теореме Пифагора из треугольников AHC и BHA соответственно имеем:

$$h_a^2 = b^2 - x^2 = c^2 - y^2,$$

откуда

$$y^2 - x^2 = c^2 - b^2 \text{ или } (y - x)(y + x) = c^2 - b^2$$

Учитывая, что $x + y = a$, получаем $(y - x)a = c^2 - b^2$ и $y - x = \frac{1}{a}(c^2 - b^2)$.

Сложим последнее равенство с равенством $y + x = a$, получим

$$2y = a + \frac{c^2 - b^2}{a} \quad \text{или} \quad y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Теперь найдем высоту $\boldsymbol{h_a}$ треугольника:

$$h_a^2 = c^2 - y^2 = (c - y)(c + y) = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} \times \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a} \times \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} =$$

$$= \frac{(b-a+c)\cdot(b+a-c)}{2c} \times \frac{(a+c-b)\cdot(a+c+b)}{2c}.$$

Поскольку

$$p = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)$$

то

$$b+c-a = 2p-2a, \quad a+b-c = 2p-2c, \quad a+c-b = 2p-2b, \quad a+b+c = 2p \quad (7)$$

Подставляем эти выражения в найденное выражение для h_a^2 получаем:

$$h_a^2 = \frac{(2p-2a)\cdot(2p-2c)\cdot(2p-2b)\cdot 2p}{4a^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}.$$

Учитывая то, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a$, получаем требуемое.

Одновременно мы вывели формулу выражающую высоту треугольника, опущенную из вершины **A** треугольника, через стороны этого треугольника:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \qquad (8)$$

Определение 5: *Окружность называется вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон. Многоугольник, в этом случае, называется описанным вокруг окружности.*

Лемма 1. *Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности:*

$$S = p\cdot r \qquad (9)$$

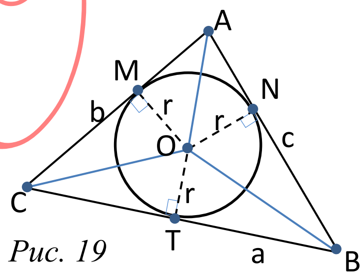


Рис. 19

Дано:
ABC – произвольный треугольник;
a, b и ***c*** – стороны этого треугольника (см. рис. 19);
Or – окружность с центром в точке **O** и радиусом r, вписанная в треугольник **ABC**;
|**OM**| = |**ON**| = |**OT**| = ***r***

Найти: S_{ABC}

Доказательство: Площадь треугольника **ABC** численно равна сумме площадей треугольников **AOB**, **BOC** и **COA** для которых стороны ***c***, ***a*** и ***b*** являются основаниями, а отрезки **ON**, **OT** и **OM** высотами соответственно. Для каждого из указанных выше треугольников применив формулу $S = \frac{1}{2}\cdot ah$ получаем:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{1}{2}\cdot cr + \frac{1}{2}\cdot ar + \frac{1}{2}\cdot br = \frac{c+a+b}{2}\cdot r = p\cdot r.$$

Следствие 1 из теоремы 17 и леммы 1: *Радиус вписанной окружности выражается через стороны треугольника формулой* $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$. **(10)**

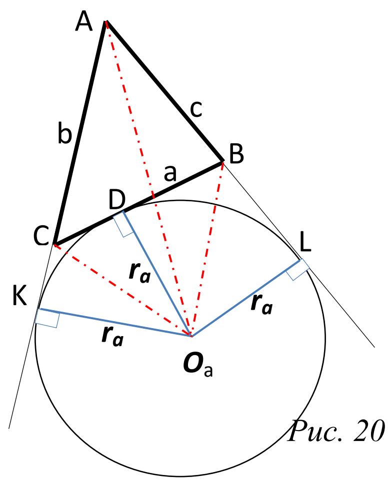


Рис. 20

Т. к. радиус вписанной в треугольник окружности равен $r = {}^{S}/_{p}$, то подставляя вместо **S** выражение полученное в формуле Герона получаем:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad (10).$$

Определение 6: *Окружность называется вневписанной в треугольник относительно угла A, если:*

1. *она касается стороны* ***BC*** *треугольника;*
2. *она касается продолжения сторон* ***AB*** *и* ***AC*** *треугольника.*

Не трудно заметить, что любой треугольник имеет три вневписанные окружности.

Лемма 2. *Площадь треугольника равна* $S = (p - a) \cdot r_a$ (11)

где r_a *– радиус вневписанной окружности, касающейся стороны* **BC** *треугольника.*

<u>Доказательство:</u> Пусть O_a — центр вневписанной окружности, касающийся отрезка **BC** — стороны a треугольника. В каждом из треугольников ABO_a, BCO_a, CAO_a высота, опущенная из O_a, равна r_a. Площадь треугольника **ABC** численно равна сумме площадей треугольников ABO_a и CAO_a минус площадь треугольника BCO_a.

Имеем

$$S_{ABC} = S_{ABO_a} + S_{CAO_a} - S_{BCO_a} = \frac{1}{2} \cdot cr_a + \frac{1}{2} \cdot br_a - \frac{1}{2} \cdot ar_a = \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = (p-a) \cdot r_a$$

Следствие 1 из теоремы 17 и леммы 2: *Радиус вневписанной окружности выражается через стороны треугольника формулой* $r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$. (12)

Т.к. радиус вневписанной окружности, касающийся стороны a треугольника равен:

$$r_a = \frac{S}{p-a},$$

то через стороны треугольника он выражается формулой: $r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$.

Если теперь обозначить через r_b и r_c радиусы вневписанных окружностей касающихся соответственно сторон **AC** и **AB** треугольника **ABC**, то можно доказать, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \qquad (13)$$

В самом деле, т.к.

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \qquad r_b = \frac{S}{p-b}, \qquad r_c = \frac{S}{p-c},$$

то

$$\frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}, \quad \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}.$$

Складывая эти формулы получим:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

что и требовалось доказать.

Проведем следующую физическую аналогию. Если взять три резистора, сопротивления которых численно равны радиусам вневписанных окружностей, и соединить их параллельно, то их суммарное сопротивление численно равно радиусу вписанной окружности.

Отметим еще одну формулу, связывающую радиус вписанной окружности с высотами треугольника.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \qquad (13a)$$

В самом деле, т.к.

$$h_a = \frac{2S}{a}, \qquad h_b = \frac{2S}{b}, \qquad h_c = \frac{2S}{c}$$ (см. теорему 11), то

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

Складывая эти формулы получим:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

Таким образом получаем:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \qquad (13b)$$

Заметим, что из формулы (13b) ни в коем случае не следует, что $h_a = r_a$ и т.д. Самостоятельно подумайте над условиями, которые необходимы для того, чтобы $h_a = r_a$ и когда возможно, что $h_a = r_a$, $h_b = r_b$ и $h_c = r_c$.

11. Еще три формулы для нахождения площади треугольника.

Теорема 18: *Площадь треугольника равна:*

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{h_b^2 \sin B}{2 \sin A \sin C} = \frac{b^2}{2(ctg\, A + ctg\, C)} \qquad (14)$$

<u>Доказательство:</u> Докажем первую из формул. На рис 17 изображен треугольник **ABC** площадь которого, согласно теореме 11, равна $S = \frac{1}{2} b h_b$. Но из прямоугольного треугольника **BDC** следует $h_b = a \sin C$. Из треугольника **ABC** по теореме синусов получаем: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ откуда $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$. Подставляя найденное в первую из формул (14) получаем требуемое.

Аналогично доказывается вторая формула. Из прямоугольного треугольника следует $a = \frac{h_b}{\sin C}$. Из прямоугольного треугольника **BDA** следует $c = \frac{h_b}{\sin A}$. Подставляя в формулу получаем: $S = \frac{1}{2} ac \sin B$ что, согласно теореме 14 и есть площадь данного треугольника.

Осталось доказать последнюю формулу. Из прямоугольных треугольников **BDA** и **BDC** соответственно имеем: $|AD| = h_b\, ctg\, A$ и $|CD| = h_b\, ctg\, C$. Но,

b = |AD| + |DC| = $h_b$ctgA + $h_b$ctgC = h_b(ctgA + ctgC). Или

$$h_b = \frac{b}{\text{ctg}\, A + \text{ctg}\, C}$$

Подставляя найденное значение высоты треугольника в формулу $S = \frac{1}{2} b h_b$ сразу получаем требуемое. **Q.E.D.**

12. Замечательные линии и точки в треугольнике.

12.1. Средняя линия треугольника.

Определение 7: *Средней линией треугольника называется отрезок соединяющий середины двух его сторон.*

Теорема 19: *Средняя линия треугольника*

1. *параллельна основанию;*
2. *равна половине основания;*
3. *отсекает от данного треугольника треугольник, площадь которого в четыре раза меньше площади исходного треугольника.*

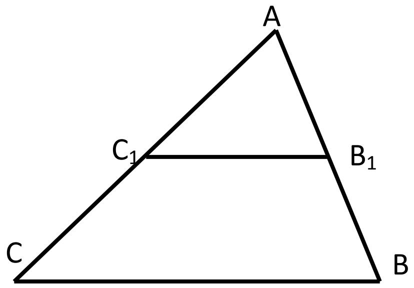


Рис. 21

<u>Доказательство:</u> Пусть дан треугольник **ABC** и точки **B₁** и **C₁** такие, что |**AB₁**| = |**B₁B**| и |**AC₁**| = |**C₁C**|. Проведем отрезок **B₁C₁** проходящий через середины двух сторон данного треугольника. См. рис. 21.

Из $\left[\begin{array}{l} \frac{|AB|}{|AB_1|} = \frac{|AC|}{|AC_1|} = 2 \\ \angle A - \text{общий} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ (по 2 − му признаку подобия) $\Leftrightarrow \frac{|BC|}{|B_1c_1|} = 2$;

из $\left[\begin{array}{c} AB \parallel AB_1,\ AC \parallel AC_1 \\ \Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow BC \parallel B_1C_1$;

из $\left[\begin{array}{c} \Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \\ k = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AB_aC_1}} = k^2 = 4$ (по теореме 7). **Q.E.D.**

12.2. Биссектриса треугольника. Вписанная окружность.

Определение 8: *Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла треугольника от вершины угла до пересечения с противолежащей стороной.*

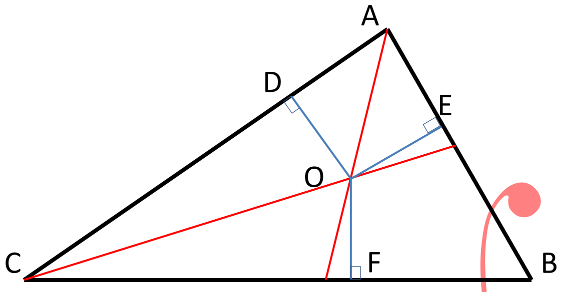


Рис. 22

Биссектрису треугольника принято обозначать буквой $\boldsymbol{\beta}$ или $\boldsymbol{l}$. Если требуется подчеркнуть из какого угла проведена биссектриса то применяют обозначения $\boldsymbol{\beta_a}$, $\boldsymbol{l_b}$, $\boldsymbol{\beta_c}$.

Теорема 20: *В любом треугольнике все три биссектрисы пересекаются в одной точке. Эта точка называется* ***инцентром*** *и является центром вписанной окружности.*

Доказательство: Во-первых покажем, что любые две биссектрисы треугольника пересекаются, то есть, что они не параллельны. В самом деле, биссектриса $\boldsymbol{\beta_a}$ образует с прямой **AC** угол **α/2**, а биссектриса $\boldsymbol{\beta_c}$ угол **γ/2**. В общем случае эти углы не равны, а, следовательно, и биссектрисы не параллельны. В равностороннем или в равнобедренном треугольнике, где эти углы могут быть равны, достаточно рассмотреть еще пару углов образуемых биссектрисами, например, со стороной **BC** и показать, что они не равны.

Рассмотрим две биссектрисы, проведённые из вершин **A** и **C** треугольника **ABC**, и обозначим точку их пересечения буквой **O** (рис. 22). Опустим из точки **O** перпендикуляры **OD**, **OE** и **OF** на стороны треугольника.

Поскольку точка **O** лежит на биссектрисе угла **BAC**, то в силу основного свойства биссектрисы (*Каждая точка биссектрисы угла находится на одном и том же расстоянии от сторон угла*) справедливо равенство: **OD** = **OE**.

Поскольку точка **O** лежит на биссектрисе угла **ACB**, то по той же причине справедливо равенство: **OD** = **OF**.

Следовательно, справедливо и равенство: **OE** = **OF**. Отсюда, в силу утверждения: *Если некоторая точка находится на одном и том же расстоянии от сторон угла, то она лежит на биссектрисе угла* заключаем, что точка **O** лежит на биссектрисе угла **ABC**. Таким образом, все три биссектрисы треугольника проходят через одну и ту же точку.

Из равенства отрезков **OD** = **OF** = **OE** следует, что точка **O** равноудалена от всех сторон треугольника и, следовательно является центром вписанной окружности. **Q.E.D.**

В пункте 13 приведено другое доказательство этой теоремы.

Теорема 21: *Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.*

Доказательство: Рассмотрим треугольник **ABC** в котором проведена биссектриса **CD** угла **C**. Продолжим сторону **BC** треугольника **ABC**, за точку **C** (См. рис. 23) Проведем через точку **A** прямую, параллельную биссектрисе **CD**. Обозначим точку пересечения построенных прямых буквой **E**. Отрезки **AC** и **CE** равны. В самом деле, угол **EAC** равен углу **ACD** как внутренние накрест лежащие углы образованные прямой **AC** пересекающей параллельные прямые **EA** и **CD**.

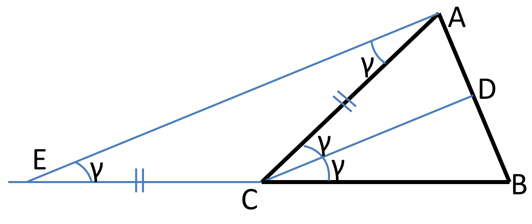


Рис. 23

Углы **AEC** и **DCB** так же равны как соответственные при параллельных прямых **EA** и **CD**.

Из равенства углов **ACD** и **DCA** следует равенство углов **AEC** и **EAC**. Таким образом получается, что треугольник **ACE** равнобедренный и стороны **AC** и **EC** в нем равны.

Воспользуемся теоремой Фалеса: угол **ABC** пересекается параллельными прямыми **AE** и **CD** и отсекает на сторонах этого угла пропорциональные отрезки

$$\frac{EC}{CB} = \frac{AD}{DB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \qquad\qquad \mathbf{Q.E.D.}$$

Рассмотрим треугольник **ABC** со сторонами ***a, b*** и ***c*** введем следующие обозначения: **|AD|** = ***u***, **|BD|** = ***v***. См. рис. 24. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{u}{v} \\ u + v = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v\frac{b}{a} \\ v\frac{b}{a} + v = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v\frac{b}{a} \\ vb + va = ac \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v\frac{b}{a} \\ v = \frac{ac}{a+b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{bc}{a+b} \\ v = \frac{ac}{a+b} \end{array}\right.$$

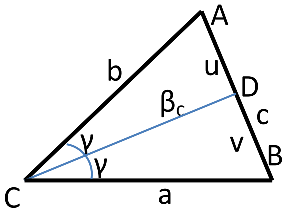


Рис. 24

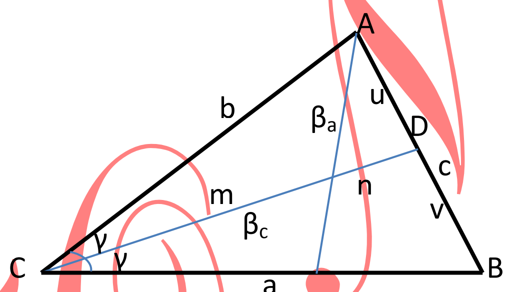


Рис. 25

Теперь рассмотрим тот же треугольник **ABC**. На рисунке 25 он для наглядности увеличен. Проведем в нем еще биссектрису $\boldsymbol{\beta_a}$ которая делит биссектрису **CD** в отношении ***m/n***. В самом деле, в треугольнике **ADC** биссектриса $\boldsymbol{\beta_a}$ делит противолежащую сторону **CD** в отношении $\frac{m}{n} = \frac{b}{u}$. Подставляя в последнее выражение найденное ранее значение ***u*** получаем:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{a+b}{c}$$

Предположим теперь, что биссектриса $\boldsymbol{\beta_b}$ (на рис. 25 она не показана) делит биссектрису **CD** в отношении $\boldsymbol{m_1/n_1}$ не равном ***m/n***. То есть, что биссектрисы пересекаются не в одной точке. Поступая по аналогии получаем:

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{a}{v} = \frac{a}{ac/(a+b)} = \frac{a+b}{c} = \frac{m}{n}$$

А это означает, что нами найдено еще одно доказательство, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

12.2.1. Длина биссектрисы треугольника.

Вернемся к рисунку 23 и рассмотрим равнобедренный треугольник **ACE**. Его боковые стороны **AC** и **EC** равны ***b***. Применив к нему теорему косинусов найдем сторону **AE**.

$$|AE|^2 = b^2 + b^2 - 2bb\cos(180° - 2\gamma)$$

$$|AE|^2 = 2b^2 + 2b^2\cos 2\gamma \qquad \text{т. к.} \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$|AE|^2 = 2b^2(1 + \cos 2\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad |AE|^2 = 4b^2\frac{(1 + \cos 2\gamma)}{2}$$

$$|AE|^2 = 4b^2\cos^2\gamma \qquad \text{т. к.} \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$|AE| = 2b\cos\gamma$$

Из подобных треугольников **AEB** и **DCB** (1-й признак) Получаем

$$\frac{\beta_c}{|AE|} = \frac{a}{a + \mathrm{b}}$$

$$\beta_c = |AE|\frac{a}{a+b} = \frac{2ab\cos\gamma}{a+b} \tag{15}$$

Применим теперь теорему косинусов к треугольнику **ABC** и найдем из него косинус угла 2γ.

$$\cos 2\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos 2\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{4ab}}$$

Подставляя это выражение в **(15)** получаем:

$$\beta_c = \frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{4ab}} = \frac{\sqrt{ab(a^2+b^2+2ab-c^2)}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2-c^2]}}{a+b} \tag{16}$$

Преобразуем выражение, стоящее в числителе под знаком радикала.

$$ab(a^2+b^2+2ab-c^2) = a^3b+ab^3+2a^2b^2-abc^2 =$$
$$= a^3b+a^2b^2-a^2bc+a^2b^2+ab^3-ab^2c+a^2bc+ab^2c-abc^2 =$$
$$= ab(a^2+ab-ac+ab+b^2-bc+ac+bc-c^2) =$$
$$= ab[a(a+b-c)+b+c(a+b-c)] = ab(a+b+c)(a+b-c) =$$
$$ab2p(2p-2c) = 4pab(p-c)$$

Подставляя преобразованную формулу в (15) получим выражение для нахождения длины биссектрисы треугольника через его полупериметр:

$$\beta_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)} \tag{17}$$

В ряде случаев формула (17) более удобна в применении.

Учитывая, что в точке пересечения биссектриса делится в отношении m/n получаем систему уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{m}{n} = \frac{a+b}{c} \\ m+n = \beta_c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \frac{cm}{a+b} \\ m+n = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \frac{cm}{a+b} \\ m = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)} - \frac{cm}{a+b} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} n = \frac{cm}{a+b} \\ \frac{am+bm+cm}{a+b} = \frac{2\sqrt{pab(p-c)}}{a+b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \frac{cm}{a+b} \\ mp = \sqrt{pab(p-c)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}} \\ m = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}} \end{array}\right. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что сделанные нами выкладки относительно биссектрисы угла **C** легко переносятся и на биссектрисы двух других углов — формулы (15), (16) и (17) симметричны относительно сторон и углов треугольника.

Таким образом, мы нашли длины отрезков соединяющего центр вписанной окружности с вершинами треугольника — m и длины отрезков соединяющих центр вписанной окружности с точками пересечения биссектрис со сторонами треугольника — n.

12.2.2. Длины отрезков.

Рассмотрим треугольник **ABC** представленный на рисунке 26. Обозначим угол при вершине **A** через 2α. Тогда по теореме косинусов $\cos A = \cos 2\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Учитывая, что $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ получаем:

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \sqrt{(1-\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)}$$

Учитывая формулы (7) рассмотрим отдельно каждое из подкоренных сомножителей.

$$1-\cos 2\alpha = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2-}{2bc}=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}=\frac{(2p-2b)(2p-2c)}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$1+\cos 2\alpha = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}=\frac{(2p-2a)2p}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}$$

$$1-\cos 2\alpha=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \qquad \text{и} \qquad 1+\cos 2\alpha=\frac{2p(p-a)}{bc}$$

И теперь для синуса угла имеем:

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{2S}{bc} \qquad (19)$$

Заметим, что формула (19) могла быть получена непосредственно из формула (4) с учетом формулы Герона. Мы применили столь сложный вывод исключительно для нахождения выражений **1 – *cos2α*** и **1 + *cos2α***.

Теперь, учитывая, что $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ получаем

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad (20)$$

Косинус угла *γ* мы уже находили в предыдущем пункте. Там он имел несколько другое представление. Естественно, что оба выражения эквивалентны.

Найдем теперь длины отрезков соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности. При этом учтем, что длины касательных проведенных к окружности из одной точки равны. Получим следующие равенства:

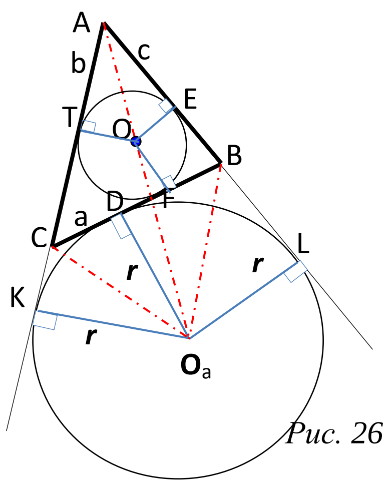


Рис. 26

|AT| + |CT| = *b*, |AE| +|BE| = *c*, |BF| + |CF| = *a*;
|AT| = |AE|, |BE| = |BF|, |CF| = |CT|,   *a* + *b* + *c* = *2p*.

Тогда,

|AT| + |CT| + |AE| +|BE| + |BF| + |CF| = *2p*

|AT| +|AE| = *2p* - |CT| - |BE| - |BF| - |CF|

2|AT| = *2p* – (|CF| + |BF|) –(|BF| + |CF|)

2|AT| = *2p* – *2a*

|AT| = *p* – *a* = |AE|

Зная длины отрезков **AT** и **AE** находим

|BE| = |BF| = *p* – *b*   и |CF| = |CT| = *p* – *c*.

Теперь найдем длины отрезков AK и AL. Они равны, как касательные, проведенные к окружности из одной точки. По этой же причине равны длины отрезков **|CK| = |CD|** и **|BL| = |BD|**. Получаем:

|AK| + |AL| = *b* + |CK| + c + |BL| = *b* + |CD| + *c* + |BD| = *b* + *c* + (|CD| + |BD|) = *b*+ *c* + *a*

2|AK| = 2*p*

|AK| = |AL| = *p*

Тогда |**CK**| = |**CD**| = $p - b$ = |**BE**| = |**BF**| и |**BL**| = |**BD**| = $p - c$ = |**CF**| = |**CT**|

Зная синус и косинус половинного угла при вершине **A** и длины найденных отрезков легко получаем:

1. длину отрезка **AO** соединяющего вершину треугольника с центром вписанной окружности

$$|AO| = \frac{|AT|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{(p-a)\sqrt{bc}}{\sqrt{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} \qquad \text{(17a)}$$

2. длину отрезка **AO**$_a$ соединяющего вершину треугольника с центром вневписанной окружности

$$|AO_a| = \frac{|AK|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{p\sqrt{bc}}{\sqrt{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{pbc}{(p-a)}} \qquad \text{(20)}$$

1. радиус вписанной окружности

$$r = |AO| \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad \text{(10)}$$

2. радиус вневписанной окружности

$$r_a = |AO_a| \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{pbc}{(p-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}} \qquad \text{(12)}$$

3. длины отрезков **BO**$_a$ и **CO**$_a$ соединяющих две оставшиеся вершины треугольника с центром вневписанной окружности

$$|BO_a| = \sqrt{r_a^2 + |BL|^2} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)} + (p-c)^2} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)+(p-c)^2(p-a)}{p-a}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(p-c)[p(p-b)+(p-c)(p-a)]}{p-a}} = \sqrt{\frac{(p-c)(p^2-pb+p^2-pa-pc+ac)}{p-a}} = \sqrt{\frac{(p-c)\left(2p^2+ac-p(a+b+c)\right)}{p-a}}$$

Окончательно получаем $|BO_a| = \sqrt{\frac{ac(p-c)}{p-a}}$ (22)

Для нахождения отрезка **CO**$_a$ воспользуемся другим способом. Предварительно заметим:

∠**BCK** = 180° - 2γ как угол смежный с углом **C**. Углы **BCO**$_a$ и **KCO**$_a$ равны, т.к. **CO**$_a$ биссектриса угла **BCK**. Значит ∠**BCO**$_a$ = ∠**KCO**$_a$ = **KCO**$_a$ 90° – γ. Поэтому из прямоугольного треугольника **KCO**$_a$ следует, что угол **KO**$_a$**C** = 90° – 90°+γ = γ. Тогда

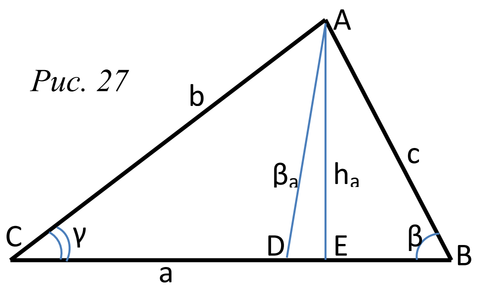
$$|CO_a| = \frac{r_a}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}}}{\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}} = \sqrt{\frac{ab(p-b)}{p-a}} \qquad \text{(22a)}$$

12.2.3. Сравнение длин биссектрисы и высоты.

Рассмотрим треугольник **ABC** представленный на рисунке 27. Обозначим угол при вершине **C** через γ , а угол при вершине **B** через **β**. Поскольку **AD** биссектриса угла **A**, то

$$\angle CAD = \angle DAB = \frac{1}{2}(\pi - \beta - \gamma).$$

Рис. 27



Т. к. **AE** – высота, то ∠**EAB** = $\pi - \beta$.

Имеем: ∠**DAE** = ∠**DAB** – ∠**EAB** = $\frac{\beta-\gamma}{2}$

Тогда

$$\frac{h_a}{\beta_a} = \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \qquad \text{(23)}$$

Следствие: в любом треугольнике высота всегда не больше биссектрисы проведенной из того же угла. Конечно же, это не более чем очевидно, т. к. длина перпендикуляра всегда меньше дины наклонной. Но формула (23) еще и показывает во сколько раз меньше.

Из этой же формулы следует, что в равностороннем треугольнике (или в равнобедренном, если высота и биссектриса проведены к основанию) биссектриса равна высоте.

12.3. Серединные перпендикуляры.

Лемма 3. *Точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалены от концов этого отрезка.*

<u>Доказательство:</u> В самом деле, пусть дан отрезок **AB** и произвольная точка **C**, лежащая на серединном перпендикуляре **CD**, к нему. Тогда **|AD|** = **|DB|**, т.к. точка **D** середина отрезка **AB**. Мы рассмотрели случай, когда **C** = **D** ∈ **[AB]**. Пусть теперь **C ∈ c и C ∉ [AB]**. Тогда (см. рис. 28) прямоугольные треугольники **ADC** и **BDC** равны по двум катетам (один, **CD** – общий, а **|AD|** = **|BD|**, т.к. **D** середина отрезка **AB**). Из равенства треугольников следует **|AC|** = **|BC|**. **Q.E.D.**

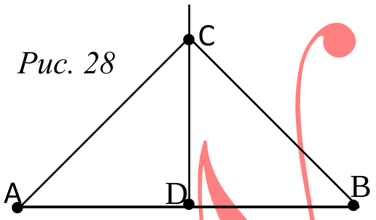


Рис. 28

Справедлива и лемма обратная данной:

Лемма 4. *Если точки A и B равноудалены от некоторой точки C, то указанная точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.*

Доказательство этого утверждения оставляем нашим читателям.

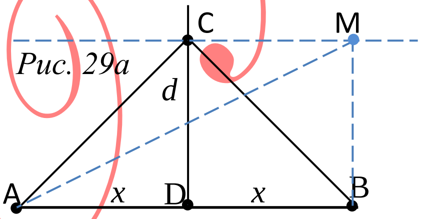


Рис. 29а

Лемма 5. *Пусть дан отрезок* **AB** *и точки* **C** *и* **M**, *находящиеся на расстоянии* ***d*** *от прямой* ***a***, *содержащий отрезок* **AB**. *Тогда*

|AC| + |CB| ≤ |AM| +|MB|, (24)

если точка **C** *лежит на серединном перпендикуляре к* **[AB]**.

<u>Доказательство:</u> Возможны три различных положения точки **M**:

1. **|MB|** = ***d*** (**|MA|** = ***d***) Проекция точки **M** на прямую ***a*** совпадает с точкой **B** (с точкой **A**). См. рис. 29а;
2. Проекция точки **M** на прямую ***a*** находится между точками **D** и **B** на расстоянии ***y*** от последней (между точками **D** и **A** на расстоянии ***y*** от последней) ;
3. Точка **M** находится правее точки **B** (левее точки **A**) на расстоянии ***y*** от нее.

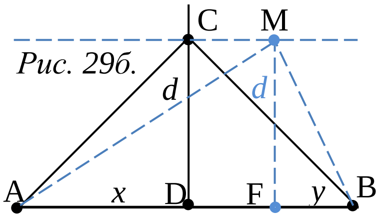


Рис. 29б.

Понятно, что третий вариант можно исключить из рассмотрения, т. к. в этом случае расстояние **MB** такое же, как и во втором положении, а расстояние MA гораздо больше.

Очевидно так же, что в формуле (24) знак равенства возможен тогда и только тогда, когда ***d*** = **0** и точки **C** и **M** принадлежат отрезку **AB**.

<u>Доказательство для положения 2:</u> Положим **|FB|** = ***y***, **|AF|** = ***2x*** – ***y***. Тогда

|AC| + |CB| = 2|AC| (согласно лемме 3) = $2\sqrt{d^2+x^2}$ и **(24′)**

|MA| = $\sqrt{d^2+(2x-y)^2}$; |MB| = $\sqrt{d^2+y^2}$

MB| + |MA| = $\sqrt{d^2+(2x-y)^2}+\sqrt{d^2+y^2}$ **(24″)**

Сразу же поставим знак неравенства между выражениями **(24′)** и **(24″)** и докажем правомочность такого действия.

$$|AC| + |CB| = 2|AC| = 2\sqrt{d^2+x^2} \le MB| + |MA| = \sqrt{d^2+(2x-y)^2}+\sqrt{d^2+y^2}$$

$$2\sqrt{d^2+x^2} \le \sqrt{d^2+(2x-y)^2}+\sqrt{d^2+y^2}$$

$$4d^2+4x^2 \le d^2+(2x-y)^2+d^2+y^2+2\sqrt{d^2+(2x-y)^2}\cdot\sqrt{d^2+y^2}$$

$$2d^2+4x^2 \le 4x^2-4xy+y^2+y^2+2\sqrt{d^2+(2x-y)^2}\cdot\sqrt{d^2+y^2}$$

$$2d^2 \le 2y^2 - 4xy + 2\sqrt{d^2 + (2x-y)^2} \cdot \sqrt{d^2 + y^2}$$

$$d^2 - y^2 + 2xy \le \sqrt{d^2 + (2x-y)^2} \cdot \sqrt{d^2 + y^2}$$

$$(d^2 - y^2 + 2xy)^2 \le [(d^2 + (2x-y)^2) \cdot (d^2 + y^2)]$$

$$d^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 2d^2y^2 + 4xyd^2 - 4xy^3 \le [(d^2 + 4x^2 - 4xy + y^2) \cdot (d^2 + y^2)]$$

$$d^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 2d^2y^2 + 4xyd^2 - 4xy^3 \le$$

$$\le d^4 + d^2y^2 + 4x^2d^2 + 4x^2y^2 - 4xyd^2 - 4xy^3 + y^2d^2 + y^4$$

$$-2d^2y^2 + 4xyd^2 \le d^2y^2 + 4x^2d^2 - 4xyd^2 + y^2d^2$$

$$0 \le 4d^2y^2 - 8xyd^2 + 4x^2d^2$$

$$0 \le d^2(y^2 - 2xy + x^2)$$

$$0 \le d^2(x-y)^2$$

Поскольку любое число в квадрате не меньше нуля, то знак неравенства нами был поставлен верно. Лемма доказана.

Заметим, что неравенство может стать равенством, если

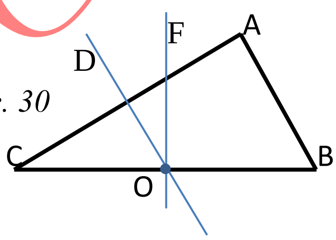
1. $y = x$, то есть в том случае, когда **M** = **C;**
2. $d = 0$ – точки **M** и **C** лежат на отрезке **AB**.

Первое положение есть частный случай второго. Оно наступает при $y = 0$.

Лемма 6. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

<u>Доказательство:</u> Два серединных перпендикуляра к сторонам треугольника всегда пересекаются.

Рис. 30



В самом деле, стороны треугольника не параллельны, следовательно, и перпендикуляры к непараллельным прямым не параллельны и, стало быть, пересекаются. Обозначим точку их пересечения через **O**. Рассмотрим серединный перпендикуляр **OF** к стороне **CB** треугольника **ABC**. Согласно лемме 3 точки **B** и **C** находятся на одинаковых расстояниях от любой точки серединного перпендикуляра, в том числе и от точки **O**. Аналогично, точки **A** и **C** находятся на одинаковых расстояниях от точек серединного перпендикуляра **DO** проведенного к стороне **AC** треугольника **ABC**, в том числе и от точки **O**. Таким образом, точка **O** равноудалена от точек **A** и **B** и, следовательно (лемма 4), лежит на серединном перпендикуляре к отрезку **AB**. Получаем, что все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке **O**. Лемма доказана.

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежит:

- *внутри треугольника – если треугольник остроугольный;*
- *на гипотенузе – если треугольник прямоугольный (См. рис. 30);*
- *вне треугольника – если треугольник тупоугольный.*

В последнем случае, если угол **C** тупой и ***c*** сторона, лежащая против тупого угла, то точка **O** лежит в другой полуплоскости от точки **C** относительно прямой c.

Следствие 1 из леммы 5: *Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, является центром окружности описанной вокруг этого треугольника.*

В самом деле, из того, что точки **A**, **B** и **C** – вершины треугольника **ABC** равноудалены от точки **O**, следует, что они лежат на окружности с центром в точке **O** и радиусом **R** = **|OA|** = **|OB|** = **|OC|**.

Теперь вернемся к пункту 9, к теореме синусов и посмотрим, откуда там взялось выражение **2R**.

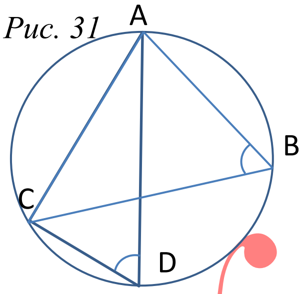


Рис. 31

На рисунке 31 изображен треугольник **ABC** и прямоугольный треугольник **ACD**, у которого угол **C** опирается на диаметр. Углы **ABC** и **ADC** равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Для этих треугольников по теореме синусов имеем:

$$\boldsymbol{ABC}:\ \frac{|AB|}{\sin\widehat{C}}=\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}}\quad \text{и}\quad \boldsymbol{ACD}:\ \frac{|AD|}{\sin 90}=\frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}}$$

Из равенства правых частей двух уравнений следует равенство их левых частей. Учитывая, что ***sin*90° = 1** и **|AD| = 2R** получаем формулу (5).

Следствие 1 из теоремы сунусов и теоремы 14: *Для любого треугольника справедлива следующая формула:*

$$S=\frac{abc}{4R}\qquad (25)$$

<u>Доказательство:</u> Из теоремы 14 имеем: $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Из теоремы синусов следует: $\frac{c}{\sin\gamma}=2R \Leftrightarrow \sin\gamma=\frac{c}{2R}$. Подставляя последнее из равенств в первое получаем требуемое. **Q.E.D.**

12.4. Высота треугольника. Ортоцентр.

В пункте 6. мы уже дали определение высоты треугольника, а в пункте 10 нашли выражение длины высоты через стороны треугольника

$$h_a=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}\qquad (7)$$

Лемма 7. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

<u>Доказательство:</u> Пусть дан треугольник **ABC**.*:* Проведем через его вершины прямые параллельные противолежащим сторонам. Точки пересечения эти прямых дадут нам новый треугольник **DFE**. (*Почему эти прямые должны пересечься?*). Рассмотрим четырехугольник **ADBC**. Стороны **AD** и **CB** , **DB** и **AB** в нем параллельны по построению. Следовательно четырехугольник **ADBC** – параллелограмм. Из этого следует, что **|AD|** = **|CB|** и **|DB|** = **|AC|**. Аналогично рассуждая из параллелограмма **ABCE** получаем: **|AE|** = **|CB|** и **|AB|** = **|EC|**. Из этих равенств следует, что **|AD|** = **|CB|** = **|AE|**. Что в свою очередь означает, что точка **A** является серединой отреза **ED**. Подобные рассуждения, касательные параллелограмма **ABFC**, приводят к тому, что точка **B** является серединой отрезка **DF**, а точка **C** – серединой отрезка **FE**. Следовательно, стороны исходного треугольника **ABC** являются средними линиями для вновь полученного треугольника **DFE**. Проведем через точки **A**, **B**, и **C** серединные перпендикуляры **AP**, **BT** и **CM** соответственно к сторонам **ED**, **DF** и **FE** они, как известно (лемма 6), пересекаются в одной

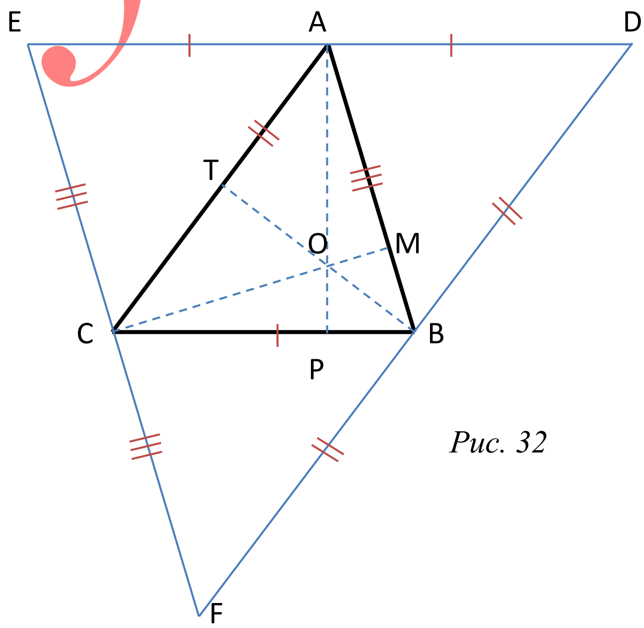


Рис. 32

точке. Но, эти же серединные перпендикуляры одновременно являются и высотами для исходного треугольника т. к.

a) проходят через вершины треугольника;
b) перпендикулярны противолежащим сторонам (по построению, как перпендикуляры к параллельным прямым).

Q.E.D.

Для тех наших читателей, кто знаком с правилами написания уравнений прямых в пункте 13 приведено другое доказательство этой леммы

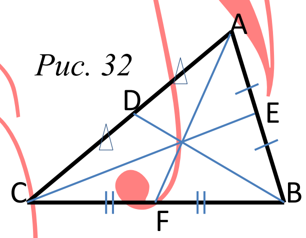
Точка пересечения высот треугольника называется ***ортоцентром***. Ортоцентр лежит

- *внутри треугольника — если треугольник остроугольный;*
- *совпадает с вершиной прямого угла — в прямоугольном треугольнике;*
- *лежит вне треугольника — если треугольник тупоугольный.*

12.5. Медиана треугольника. Центр тяжести треугольника.

Определение 9: *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется* ***медианой*** *треугольника.*

Рис. 32



Или, по другому: *медиана делит противолежащую сторону на две равные части*. Медианы треугольника обозначаются буквой m или соответственно $\boldsymbol{m_a}$, $\boldsymbol{m_b}$ и $\boldsymbol{m_c}$.

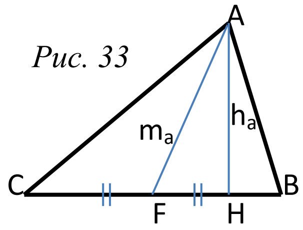
Теорема 22: *Точка пересечения всех трех медиан теугольника всегда лежит внутри треугольника и делит медианы в отношении 2:1 считая от вершины.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 22 рассмотрим несколько лемм.

Напомним, что две фигуры называются ***равновеликими***, если их площади равны.

Лемма 8. *Медиана делит треугольника на два равновеликих треугольника.*

Рис. 33



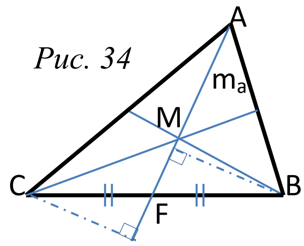
<u>Доказательство:</u> Для доказательства достаточно провести высоту $\boldsymbol{h_a}$ треугольника **ABC**. Она является высотой и для треугольника **AFB**, и для треугольника **AFC**. А так как основания у них равны, то согласно теореме 11 равны и их площади. **Q.E.D.**

Следствие 1 из леммы 8: *Для любой точки* **M** *взятой на медиане* **AF** *справедливо утверждение: треугольники* **MFC** *и* **MFB** *равновелики.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 8. Достаточно взять на медиане $\boldsymbol{m_a}$ произвольную точку **M** и опустить из нее высоту на прямую **CB**.

Следствие 2 из леммы 8: *Для любой точки* **M** *взятой на медиане* **AF** *справедливо утверждение: треугольники* **AMC** *и* **AMB** *равновелики.*

Рис. 34



В самом деле, по лемме 8 треугольники **AFB** и **AFC** на которые медиана $\mathbf{m_a}$ делит данный треугольник **ABC** равновелики. По следствию 1 из леммы 8 равновелики и треугольники **MFB** и **MFC**. Если из площадей равновеликих фигур вычесть площади других равновеликих фигур, то оставшиеся фигуры тоже будут равновелики. **Q.E.D.**

Замечание! Из равновеликости треугольников **AFC** и **AFB** (**AMC** и **AMB**) следует, что их ***высоты, проведенные к общей стороне*** **AF** (**AM**), лежащей на медиане *равны*.

Для большой наглядности рисунки 33 и 34 объединены в рисунок 35. На нем треугольник **AFC** заштрихован зеленым цветом, частично вертикальными штрихами, частично зеленой клеткой. Равновеликий ему треугольник **AFB** аналогично заштрихован красным цветом. Равновеликие треугольники **MFC** и **MFB** заштрихованы соответственно зеленой и красной клетками.

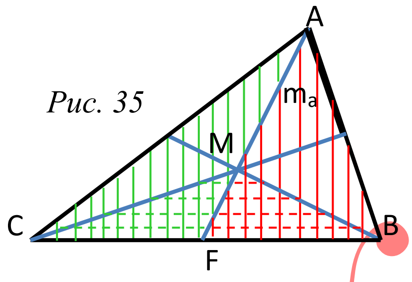


Рис. 35

И, наконец, равновеликие треугольники **AMC** и **AMB** заштрихованы только вертикальными линиями: зеленого и красного цветов соответственно.

Теперь мы можем дать медиане следующее определение:

Определение 10: *Медианой **AF** треугольника **ABC** является геометрическое место точек **M** внутри треугольника **ABC**, для которых треугольники **AMB** и **AMC** равновелики.*

Точно так же проводится и обратное рассуждение.

Лемма 9. *Если точка* **M** *внутри треугольника* **ABC** *такова, что треугольники* **AMB** *и* **AMC** *равновелики, то точка* **M** *лежит на медиане.*

Доказательство: проведем методом от противного.

raa[2] Пусть AM пересекает BC в точке K ≠ F (т.е. точка M не лежит на медиане). Треугольники AKB и AKC равновелики по условию. Поскольку у них AM общая сторона, то и высоты, опущенные на нее, равны (требование теоремы 11). Тогда, по равенству высот, проведенных к общей стороне MK, равны и треугольники MKB и MKC. Но, у этих треугольников равны и высоты проведенные к BC. Следовательно, BK = CK, т.е. K — середина BC, K = F и AK – медиана. Точка M лежит на медиане.

Лемма 10. *Любые две медианы треугольника пересекаются.*

Доказательство: Пусть дан треугольник **ABC**. Проведем через его вершину **C** прямую параллельную **AB**, а через вершину **B** прямую параллельную **AC**. Точку пересечения этих прямых обозначим через **D**. Тогда четырехугольник **ABDC** – параллелограмм, причем **BC** – одна из его диагоналей. Тогда вторая диагональ **AD** содержит в себе медиану треугольника **ABC**, т.к. диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам, т.е. AD проходит через середину **BC**. См. рис. 36.

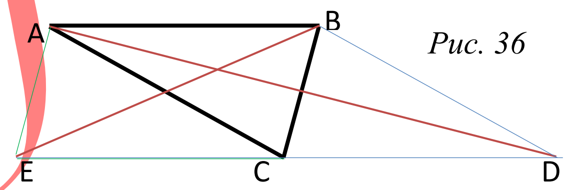


Рис. 36

По аналогичным рассуждениям строится параллелограмм **ABCE** и доказывается, что **BE** содержит в себе вторую медиану треугольника.

В результате этих построений мы получили трапецию **ABDE** с диагоналями **AD** и **BE**. А, как известно, диагонали трапеции пересекаются, следовательно, пересекаются и медианы треугольника. **Q.E.D.**

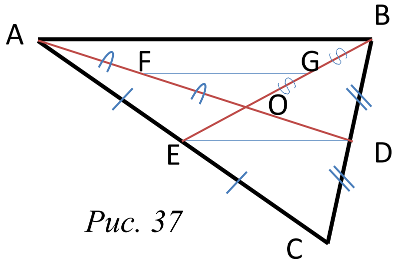


Рис. 37

Лемма 11. *Точка пересечения двух любых медиан треугольника делит каждую из этих медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.*

Доказательство: Рассмотрим две любые медианы треугольника, например, медианы **AD** и **BE**, и обозначим точку их пересечения буквой **O** (рис. 37).

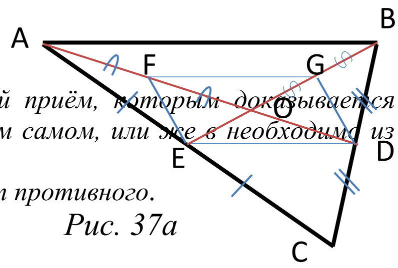


Рис. 37a

---

[2] *Доведение до абсурда (лат. reductio ad absurdum) — логический приём, которым доказывается несостоятельность какого-нибудь мнения таким образом, что или в нём самом, или же в необходимо из него вытекающих следствиях обнаруживается противоречие.*

Частным случаем доведения до абсурда является доказательство от противного.

Обозначим середины отрезков **AO** и **BO** буквами **F** и **G** соответственно.

Теперь рассмотрим четырёхугольник **FGDE**. Сторона **ED** этого четырёхугольника является средней линией в треугольнике **ABC**. Следовательно:

1. **ED || AB** ; 2. $|\mathbf{ED}| = \frac{1}{2}|\mathbf{AB}|$.

Аналогично: сторона **FG** четырёхугольника **FGDE** является средней линией в треугольнике **ABO** и отсюда

1. **FG || AB** ; 2. $|\mathbf{FG}| = \frac{1}{2}|\mathbf{AB}|$.

Получаем: две стороны четырехугольника параллельны и равны. Следовательно, четырехугольник **FGDE** — параллелограмм. Диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам. Поэтому: **|EO|** = **|OG|** и **|DO|** = **|OF|**. Из этих равенств и равенств **|OG|** = **|GB|** и **|OF|** = **|FA|** получаем:

|EO| = ||OG| = |GB| , |DO| = |OF| = |FA| и **Q.E.D.**

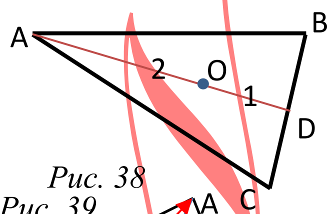
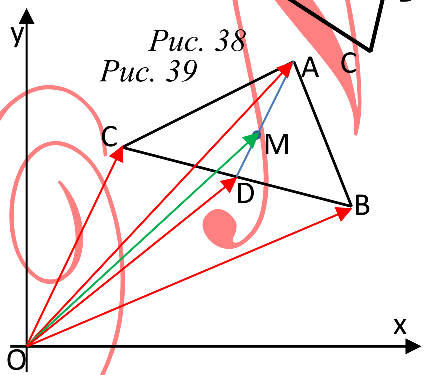


Рис. 38

Следствие 1 из леммы 11. *Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

<u>Доказательство:</u> Пусть в треугольнике **ABC** проведена медиана **AD**. Пусть точка **O** ∈ **[AD]** такая, что **|AD| : |OD| = 2**. Т.к. точка делящая отрезок в заданном отношении является единственной, то и другие медианы пройдут через эту точку. **Q.E.D.**



Осталось доказать, что точка **O** пересечения медиан лежит внутри треугольника. Еще раз внимательно прочтите леммы 10 и 11, взгляните на рис. 36 и сделайте это самостоятельно. Теорема 22 полностью доказана.

Определение 11: *Точка пересечения медиан треугольника называется* **центроидом** *треугольника.*

Точка пресечения медиан треугольника является центром тяжести треугольника.

Поэтому, если известны координаты вершин треугольника, то "нагрузив" их единичными массами и пользуясь известной из физики формулой для определения центра тяжести, можно найти координаты точки **O** пресечения медиан треугольника.

Пусть **A**(x_a;y_a), **B**(x_b;y_b), **C**(x_c;y_c) тогда

$$X_{\text{ц.т.}} = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad \text{и} \quad Y_{\text{ц.т.}} = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \qquad (26)$$

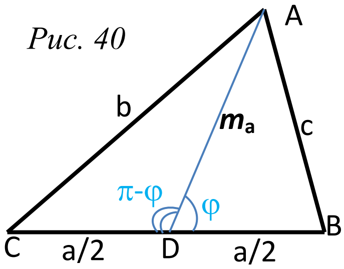


Рис. 40

Покажем, как формулы (26) могут быть получены и без знания физики — чисто из свойств векторов. Достаточно вспомнить, что если векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ имеют соответственно координаты **(x_a; y_a)**, **(x_b; y_b)**, **(x_c; y_c)** то вектор $\mu\vec{a}$ имеет координаты **(μx_a; μy_a)**, а вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ — координаты **($x_a + x_b$; $y_a + y_b$)**.

Рассмотрим в декартовой системе координат треугольник **ABC** в котором проведена медиана **AD** и точка **M** — центр тяжести треугольника. См. рис. 39. Для вектора $\overrightarrow{OM}$ получаем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM} \qquad (27)$$

Теперь выразим вектора $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DM}$ через вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \qquad (28)$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} \qquad \overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} \qquad (29)$$

Подставляя (28) и (29) в (27) получим:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \qquad (30)$$

Таким образом, для координат вектора $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ получены формулы (26). Заметим, что формулы (26) верны и в том случае, если точки **A**, **B** и **C** не принадлежат одной плоскости. Естественно, что в этом случае необходимо добавить аналогичную формулу и для координаты $\mathbf{Z}_{\text{ц.т.}}$ центра тяжести треугольника.

12.5.1. Длина медианы треугольника.

Рассмотрим произвольный треугольник **ABC** в котором проведена медиана m_a и точка **D** делит сторону **BC** пополам. Применив теорему косинусов к каждому из треугольников **ADB** и **ADC** выразим стороны c и b треугольника. Учтем также, что $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$.

$$c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a\frac{a}{2}\cos\varphi = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m_a a\cos\varphi$$

$$b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a\frac{a}{2}\cos(\pi-\varphi) = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a a\cos\varphi$$

Складывая последние равенства, получаем: $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

Откуда находим: $\quad m_a = \sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \qquad$ **(31)**

Из формулы (31) вытекает следующая, весьма полезная формула, связывающая длины всех трех медиан треугольника с его сторонами.

Перепишем формулу (31) в виде $m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ и по аналогии с ней запишем формулы для m_b и m_c.

$$m_b^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad \text{и} \quad m_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Складывая эти равенства получаем:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{3}{4}c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \qquad (32)$$

12.5.2. Еще две теоремы о медианах треугольника.

Теорема 23: *Медианы треугольника делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.*

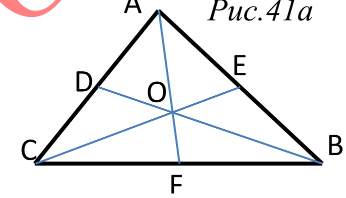


Рис.41а

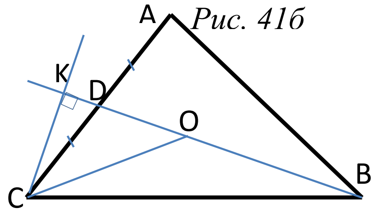


Рис. 41б

<u>Доказательство:</u> Покажем, что площадь треугольника **DOC** изображенного на рисунке 41 равна **1/6** площади треугольника **ABC**. Согласно лемме 8

$$S_{ABC} = 2S_{BDC}$$

$$S_{DOC} = \frac{1}{2}|DO||CK|$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2}|BD||CK| = \frac{1}{2}3|DO||CK| = 3\frac{1}{2}|DO||CK| = 3S_{DOC}$$

Подставляя в первую формулу значение S_{DOC} окончательно получим:

$$S_{ABC} = 6S_{DOC}$$

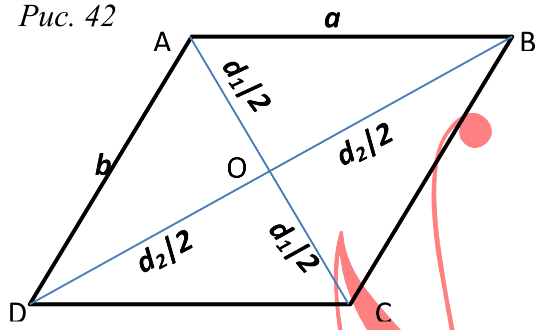
Q.E.D.

Отсюда следует, что площади треугольников **AOC**, **AOB** и **BOC** равны и составляют **1/3** от площади данного треугольника.

Последняя теорема, которую мы рассмотрим в этой части непосредственно не связана с медианами треугольника, но имеет большое практическое значение.

Теорема 24: *В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.*

Рис. 42



Доказательство: Рассмотрим треугольники **ABC** и **BCD**. **BO** – медиана первого треугольника, а **CO** – второго. Тогда согласно формуле (31) запишем:

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{d_1^2}{4}$$

и

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{d_2^2}{4}$$

Складывая последние формулы получим:

$$\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} = a^2 + b^2 - \frac{d_1^2}{4} - \frac{d_2^2}{4}$$

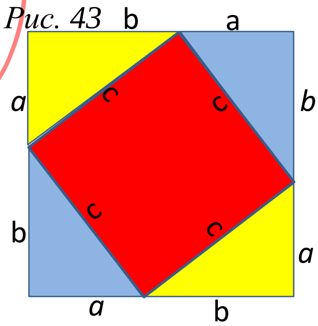
Откуда и получаем искомое:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

13. Теорема Пифагора, теорема косинусов и лемма 7.

Теорема 12: Теорема Пифагора.

Рис. 43



Доказательство 2: Пусть дан квадрат со стороной $\boldsymbol{a + b}$. Его площадь равна $\boldsymbol{(a + b)^2}$. Разобьем его на четыре прямоугольных треугольника с катетами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, площадь каждого из которых равна $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab}$, и квадрат со стороной $\boldsymbol{c}$, площадь которого равна $\boldsymbol{c^2}$. Тогда

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = 4\frac{1}{2}\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{c}^2 \Rightarrow \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{c}^2$$

Откуда и получаем $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ **Q.E.D.**

Теорема 13: Теорема косинусов.

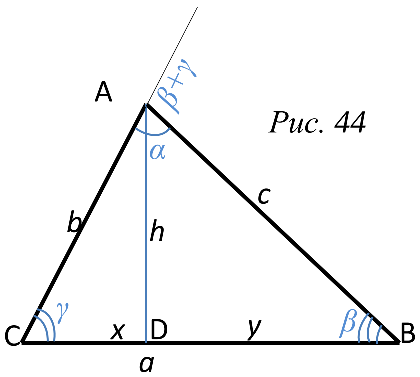


Рис. 44

Доказательство 2: Пусть дан произвольный треугольник **ABC**, в котором проведена высота **AD** и введены обозначения (См. рис. 44).

Из прямоугольных треугольников **ADB** и **ADC** получаем

$\boldsymbol{x^2 + h^2 = b^2}$ и $\boldsymbol{y^2 + h^2 = c^2}$. Кроме того **a = x + y**. Возведем последнее равенство в квадрат и сложим с двумя первыми. Получим

$$\boldsymbol{a^2 + x^2 + y^2 + 2h^2 = b^2 + c^2 + x^2 + 2xy + y^2}$$

$$\boldsymbol{a^2 + 2h^2 = b^2 + c^2 + 2xy}$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 + 2xy - 2h^2} \qquad (33)$$

Кроме того, из тех же прямоугольных треугольников имеем следующие четыре равенства:

$\boldsymbol{y = c\cdot\cos\beta;}$ $\boldsymbol{h = c\cdot\sin\beta}$ ***и*** $\boldsymbol{x = b\cdot\cos\gamma;}$ $\boldsymbol{h = b\cdot\sin\gamma}$

Из этих формул находим

$$\sin\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{c}}; \quad \cos\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{c}} \quad \text{и} \quad \sin\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{b}}; \quad \cos\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}}.$$

Вычислим теперь косинус угла **A**.

$$\cos\alpha = \cos[\pi - (\beta+\gamma)] = -\cos(\beta+\gamma) = -(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) =$$

$$= \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma = \frac{h}{c}\frac{h}{b} - \frac{y}{c}\frac{x}{b} = \frac{h^2}{cb} - \frac{xy}{cb}$$

Тогда $h^2 - xy = cb\cos\alpha$

Подставляя последнюю формулу в формулу (33) для стороны a треугольника окончательно получаем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha$.

Теорема 20: *В любом треугольнике все три биссектрисы пересекаются в одной точке.*

Рассмотрим угол **ACB** треугольника **ABC** и вписанную в этот угол окружность. Мы знаем, что центр этой окружности лежит на биссектрисе указанного угла. Таким образом, **CE** — биссектриса угла **ACB**.

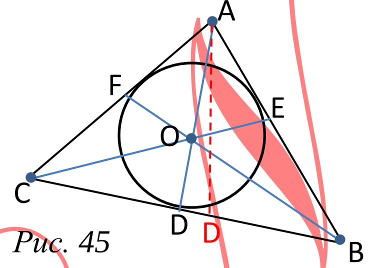


Рис. 45

Аналогично, **BF** — биссектриса угла **ABC**. Биссектриса **CE** проходит через точку **C** и не проходит через точку **B**; Биссектриса **BF** проходит через точку **B** и не проходит через точку **C**. Значит, прямые **CE** и **BF** не совпадают и точка **O** их единственная общая точка — точка пересечения двух биссектрис треугольника.

Аналогично, биссектриса **AD** пересекает биссектрису **CE** и биссектрису **BF** и имеет с каждой из них общую точку. Предположим, что эти точки не совпадают с точкой **O** (пунктирная линия на рис. 45). Но, в этом случае, мы получаем еще две окружности вписанные в данный треугольник, чего, очевидно, не может быть. Итак, точка **O** — точка пересечения биссектрис треугольника и центр вписанной в этот треугольник окружности.

Лемма 7: *Высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

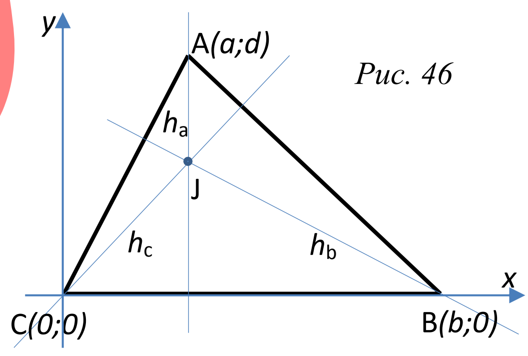


Рис. 46

Не уменьшая общности, расположим произвольный треугольник **ABC** в системе координат таким образом, чтобы одна из его вершин совпала бы с началом координат, а одна из сторон лежала бы на оси абсцисс (См. рис. 45). Тогда уравнение прямой, содержащей h_a будет

h_a: $\quad x = a \quad$ **(34)**

Уравнение прямой, содержащей **AC** запишем как уравнение прямой , проходящей через две точки.

(AC): $\frac{x-0}{a-0} = \frac{y-0}{d-0} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{d} \Rightarrow dx - ay = 0$.

Тогда, уравнение прямой, проходящей через точку **B** и перпендикулярной **AC**, т.е. уравнение прямой, содержащей h_b будет: $a(x-b) + d(y-0) = 0 \Rightarrow a(x-b) + dy = 0$:

h_b: $\quad ax + dy - ab = 0 \quad$ **(35)**

Запишем уравнение прямой **AB**.

(AB): $\frac{x-a}{a-b} = \frac{y-d}{d-0} \Rightarrow dx - ad = (a-b)y - ad + bd \Rightarrow dx + (b-a)y - bd = 0$

Тогда, уравнение прямой, проходящей через точку **C** и перпендикулярной **AB**, т.е. уравнение прямой, содержащей h_c будет:

h_c: $\quad (a-b)x + dy = 0 \quad$ **(36)**

Найдем точку пересечения прямых содержащих h_a, h_b и h_c, т.е. решим систему, состоящую из уравнений (**34**), (**35**) и (**36**). Она дает нам единственное решение: $x = a$ и $y = \frac{ab-a^2}{d}$.

Таким образом все три высоты треугольника пересекаются в точке $\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{a};\frac{\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{d}}\right)$.

Q.E.D.

Подведем итоги.

Мы строго определили какая геометрическая фигура называется треугольником.

Указали все возможные типы треугольников: остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние и равнобедренные.

Рассмотрели три признака равенства произвольных треугольников и четыре признака равенства для прямоугольных треугольников.

Рассмотрели три признака подобия для произвольных треугольников и три признака подобия для прямоугольных треугольников.

Доказали, что сумма углов треугольника равна 180°, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним.

Доказали, что против большей стороны треугольника лежит больший угол.

Доказали, что площадь треугольника равна:

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=(p-a)r_a}$$

$$\boldsymbol{S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{h_b^2\sin B}{2\sin A\sin C}=\frac{b^2}{2(ctg\,A+ctg\,C)}=\frac{abc}{4R}}$$

Определили понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.

Доказали теорему Пифагора.

Установили зависимость между сторонами треугольника и синусами противолежащих углов (теорема синусов). Выразили через стороны треугольника косинусы углов треугольника (теорема косинусов).

Выразили через стороны треугольника радиусы вписанной и описанной окружностей, радиусы вневписанных окружностей, длины медиан, высот треугольника и биссектрис треугольника.

Нашли длины отрезков, на которые биссектриса разбивает противолежащую сторону треугольника, длины отрезков, на которые разбиваются биссектрисы треугольника в точке пересечения.

Теперь осталось только научиться правильно использовать полученные знания при решении задач.

Желаем успехов !!!

Кошавкин Сергей Геннадьевич.

Несколько слов об аксиомах и постулатах.

Говоря об аксиоме, греки начинали фразу со слов: «Очевидно, что...» И тем отбрасывали всякую возможность спора на этот счет.

Постулаты, в древнегреческом понимании, представляли собой конкретные утверждения, свойственные той или иной науке. Первая фраза постулата должна была начинаться словами «допустим, что...». Это также снимало возможность спора, но не налагало на выдвинутое положение критерия безусловности.

Такое очень важное и тонкое различие между аксиомой и постулатом со временем сгладилось и принесло неисчислимые беды и чистым философам, и представителям натуральной философии, но о том речь дальше.

Изложение геометрии в книгах Эвклида построено в виде системы определений, аксиом и постулатов, из которых логическим путем выводятся теоремы. В первых четырех книгах Эвклид рассматривает геометрию на плоскости. При этом в книге первой он формулирует пять основных требований, или допущений, на которых строит остальные выводы. Постулаты Эвклида настолько наглядны, настолько очевидны, что так и хочется назвать их аксиомами. Но мы уже предупреждены. И мы начеку. Да и сами постулаты при всей своей определенности точно взывают к бдительности. Смотрите сами. Эвклид пишет: «Нужно потребовать (помните, это эквивалентно словам «допустим, что...»):

1. Чтобы из каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию (и притом только одну).

2. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжить по прямой.

3. И чтобы из любого центра любым радиусом можно было описать окружность.

4. И чтобы все прямые углы были друг другу равны.

5. И чтобы всякий раз, как прямая, пересекая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие вместе меньше двух прямых, эти прямые при неограниченном продолжении пересекались с той стороной, с которой эти углы составляют меньше двух прямых».